

全域木に対応する国際価値

執筆開始 2015.9.6

第 1 稿完成 2015.10.8

塩沢由典

§ 1. 全域木に対応する国際価値を研究する意義

塩沢由典(2014)においては、正則な国際価値を生産可能集合の極大フロンティアの側面の法線方向に対応するものとして定義した。正則な国際価値をこのように定義するとき、経済がすべての国で完全雇用状態でないとき、どのような意義をもつか、不明な点も多い。塩沢由典(2015a)では、2 国 2 財の数値例をもとに生産可能集合の内部がどのようになっているか検討し、側領域という概念を導入した。塩沢由典(2015b)では、世界需要が与えられたとき、労働投入が各国でどれだけ必要かという観点から、これまでのリカード貿易理論を整理しなおした。本論文では、生産可能集合に異存しない形で国際価値を分析できないかという岡敏弘の示唆に基づいて、基本的に国際価値とそれに付随する競争パタン観点にたつて国際価値論を見直してみた。本論文は、基本的にリカード経済を分析対象とし、ここでの分析を中間財貿易を含むリカード・スラッフア貿易経済に拡張する課題については、第 10 節で簡単に述べるに留める。

この研究においては、全域木が重要な役割を演ずる。これは、一国経済における技術系に相当するものである。全域木は、グラフ理論の概念であり、以下の展開では、その基礎的概念は既知のものと前提する。ただし、第 xx 節 付録において、グラフ理論の必要な概念を説明する。

(M,N)リカード貿易経済は、M 国 N 財の経済で各国はただ 1 種類の労働力をもつとする。この経済の生産係数は、M 行 N 列の正行列 A により与えられる。 A と全域木 T とを指定するとき、国際価値 $v = (w, p)$ が定数倍を除いて唯一に定まる(定理 2.1)。このうち、認容な国際価値を与える T を(言葉の濫用で)認容な全域木という。2 つの全域木 T_1 と T_2 とは各国がもつ競争的な財の数が等しいとき、同じ国クラスに属するという。同じ国クラスに属する全域木は多数あるが、経済が一般の場合、同じ国クラスに属する全域木で認容な国際価値を会えるものはただ一つに限られる(定理 2.7)。この全域木が指定されるとき、別の国クラスに属する全域木で認容なものは、任意ではない。この関係を研究することで、生産可能集合の極大面に訴えることなく、 A に対応する認容な国際価値あり方がかなりの程度に判明する。

国際経済では需要の影響を完全に除去することはできないが、国際価値が生産可能集合の極大点においてのみ定義されるという限界から逃れることができる。しかし、極大境界ではその側面内部では国際価値が一義に決まったのにたいし、生産可能集合の内部の点 y では、一般にはふたつ以上の認容な国際価値が存在して、それぞれの場合に競争的な技術のみをもちいて y を純生産するような2つの全域木が存在する。これを一意に決めるような経済的機構があればよいが、いまのところ見つかっていない。

§ 2. 主要な結果

[定理 2.1] リカード貿易経済において、 T をある全域木(展張木、連結木)とする。このとき、定数倍を除いて、正の国際価値 $v = (w, p)$ が唯一定まる。

これを全域木 T の定義する(あるいは T に付随する)国際価値と呼び、 $v(T)$ など書く。認容な国際価値をもつ全域木を簡単に認容な全域木ということがある。

[注意 2.2] リカード・スラッファ貿易経済では、辺を技術とする二部グラフにおいて、ひとつの全域木を定めても、正の国際価値 $v = (w, p)$ が定まるとは限らない。いっぽんには、負あるいは0の値を含む。

[定義 2.3](競争クラス) リカード貿易経済あるいはリカード・スラッファ貿易経済において、各国がもつ競争的な技術の個数 (c_1, c_2, \dots, c_M) を国別競争クラスあるいは単に国クラスと呼ぶ。とくに

$$c_1 + c_2 + \dots + c_M = M + N - 1$$

のとき、展張クラスという。国別クラスと同様に、各財について競争的な技術をもつ国数のベクトル (g_1, g_2, \dots, g_N) を財別競争クラス(財クラス)という。

国別クラスと財別クラスとは、双対的な関係にあり、国別クラスについて成立する定理は、財別クラスに読み替えることができる。この意味で、以下の議論のうち、国別クラスと財別クラスとを区別する必要のあるものはほとんどない。したがって、以下では、とくに区別が必要な場合を除き、単にクラスとよび、標準的には国別クラスを考える。第8節では、財別クラスが考察の対象となる。

競争クラスは、二部グラフのことばで簡単に表現される。いま、 KM, N を M, N 完全二部グラフとするとき、二つの部分グラフがおなじ競争クラスに属するとは、どの左頂点においても、 T_1 と T_1 の次数が等しいことである。

[注意 2.4] Jones(1961, p.164)では、クラスは各財につき競争的な国の数として与えられている。これはある意味でクラスの共役な概念である。Jones は、ある国がある財のみを生産する完全特化の状態を考えた。これは生産可能集合の(正象限内部とはかぎらない)端点を完全特化点、そのパターンを指定することを割当 assignmet と呼んだ。2つの割当は、各財がそれに割り当てられる同じ国の数をもつとき、同じクラスに属すると定義し、(2つの国が同じ相対費用をもつタイの場合を除いて)各クラスに有効な割当(完全特化点で極大なもの)は、ただひとつであること指摘した。しかし、以下の諸点に注意する必要がある。

- (1)この主張は正しいが、Jones は厳密な定義を与えていない。とくに、各クラスに極大な割当が存在することを示していない。M 国 N 財の場合の考察がない。
- (2)生産可能集合の端点の集合が分かったからといって、生産可能集合の側面(facets)のひとつを知るのは容易ではない。P 表示(点集合の最小多面体)を H 表示(半空間の共通部分)に転換するには、一般に面数と端店数の指数関数に比例する時間がかかる。したがって、側面を定義する価格および競争タイプを直接研究することが望ましい。
- (3)側面が重要という観点にたつと、国際貿易の特化パターンなどの決定は、線型計画法とは異なる種類の問題群であることが分かる。

[定理 2.5](一般の位置にある投入係数行列)

(M,N)リカード貿易経済において、一般の位置にある労働投入係数行列は、正の行列の集合の中で開集合をとなし、いたるところ稠密に存在する。

この定義が意味をもつためには、労働投入係数行列 A が一般の位置にある(あるいは生成的である)という概念が定義されなければならない。この概念は、さまざまな場面で表れるが、リカード貿易経済の場合には、全域木の概念をもちいて単純明快に定義することかできる。

[定義 2.6](一般の位置にある投入係数行列)

リカード貿易経済の労働投入係数行列を A とする。任意の全域木 T を取るとき、T が定義する国際価値 $v = v(T) = (w, p)$ について、

$$w_i a_{ij} = p_j \Leftrightarrow (i,j) \in T$$

が成り立つとき、A は一般の位置にあるという。もし $(i,j) \in T$ ならば、定義から

$$w_i a_{ij} = p_j$$

となるから、A が一般の位置にあるという条件は、 $(i,j) \notin T$ ならば

$$w_i a_{ij} \neq p_j$$

と主張するのに同値である。すなわち、A が一般の位置にあるとき、(M,N)完全二部グラフの任意の全域木 T について、

$$v = v(T)$$

とするとき、 v の競争パターンは全域木は

$$C(v) = T$$

となる。

[定理 2.7] リカード貿易経済において、任意のクラス c には、ひとつの認容な国際価値 v をもつ、 c に属する全域木 T がかならず存在する。投入係数行列が一般の位置にあるとき、この全域木は唯一に定まる。

(証明)

証明には次の定理 2.8 および定理 2.9 を用いる。これらの定理の証明は第 4 節で与える。この 2 つの定理を仮定するとき、定理 2.7 は、次のように示せる。

まず、ひとつのクラスには少なくともひとつ認容な国際価値が存在する。なぜなら、任意の展張クラスには、すくなくともひとつ全域木 T が存在する。国際価値 $v(T)$ が認容なら証明することはない。もし $v(T)$ が認容でないとする、定理 2.8 より超過利潤をもつ辺の個数が T より少ない T^* が存在する。したがって、全域木を T の変えていけば、超過利潤をもつ辺が 0 のものが同じクラス内に存在しなければならない。これは認容な国際価値が存在することに等しい。

いま、同じクラスにある 2 つの全域木 T_1 と T_2 とがともに認容な国際価値を定義するとすると、定理 2.9 から T_1 と T_2 とは同じクラスに属することはできない。これより、各クラスには、ちょうどひとつ認容な国際価値が存在することが分かる。 \square

定理 2.7 は、国別クラスについてだけでなく、財別クラスについても妥当する。すなわち、任意の展張的財別クラスには、ただひとつの認容な国際価値が存在する。

[定理 2.8]

リカード貿易経済が一般の場合であるとする。ある全域木 T を取るとき、もし $v(T)$ が認容でなければ、同じクラスの全域木 T^* が存在して、 $v(T^*)$ の超過利潤をもつ辺の数がひとつ少ないものが存在する。

[定理 2.9]

一般の位置にあるリカード経済において、認容な価値 $v(1) = (w(1), p(1))$ と $v(2) = (w(2), p(2))$ とがあるとする。このとき、 $v(1), v(2)$ を与える全域木 T_1, T_2 は、異なるクラスに属する。

[研究課題 2.10]

あるクラス $C1$ の全域木 T が認容であるとき、他のクラス $C2$ において認容である全域木 $T2$ が確定する場合がある。この関係が一般にどのようなものか、追究せよ。

§ 3. 簡単な諸例題

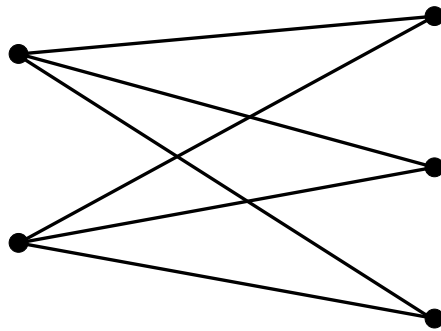
一般の証明に入る前に、必要な概念や定理などについて、簡単な場合を例題としてあげておく。

3.1 二部グラフと全域木

例題 1 (二部グラフ)

2国3財のリカード経済に対応する二部グラフ $K_{2,3}$

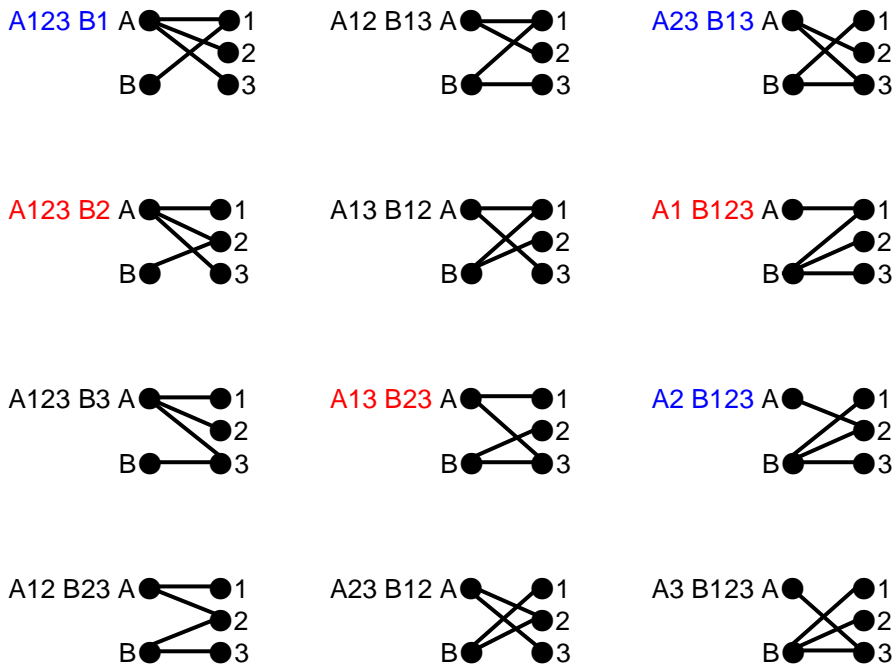
2国3財のリカード経済に対応する二部グラフ $K_{2,3}$



第 1 図

例題 2 ($K_{2,3}$ の全域木のすべて)

2国3財のリカード経済における全域木は、全部で 12 個ある。



第2図

(注意) $K_{m,n}$ の全域木の個数は、Scoin の定理により $m^{(n-1)}n^{(m-1)}$ 個ある。2 国 3 財の場合、 $2^2 \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 = 12$ 。この定理の証明については、ResearchGate の質問 Who knows a simple elementary proof of of Scoin's formula? をみよ。これは Prufer code あるいは Prufer code sequence を用いて証明できる。Prufer code の説明は英語の Wikipedia の Prufer code sequence みよ。全域木と Prufer code との間に 1 対 1 の対応があるが、そのコードの現れ方は、なかなか複雑である。

例題 3 (おなじクラスに属する全域木の数 1)

(2, 2) リカード経済の場合

$$M+N-1 = 2+2-1 = 3$$

展張的クラス (2, 1) (1, 2)

(2, 3) リカード経済の場合

$$M+N-1 = 2+3-1 = 4$$

展張的クラス (3, 1), (2, 2), (1, 3)

(3, 3) リカード経済の場合

$$M+N-1 = 3+3-1 = 5$$

すべてのクラス (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3)

クラス (2, 2, 1) に属する全域木 計 18 個

(12, 13, 1) (12, 13, 2) (12, 13, 3)

(12, 23, 1) (12, 23, 2) (12, 23, 3)

(13, 12, 1) (13, 12, 2) (13, 12, 3)

(13, 23, 1) (13, 23, 2) (13, 23, 3)

(23, 12, 1) (23, 12, 2) (23, 12, 3)

(23, 13, 1) (23, 13, 2) (23, 13, 3)

クラス (3, 1, 1) に属する全域木 計 9 個

(123, 1, 1) (123, 1, 2) (123, 1, 3)

(123, 2, 1) (123, 2, 2) (123, 2, 3)

(123, 3, 1) (123, 3, 2) (123, 3, 3)

対称性を考えると、全部で

$$3 \cdot 9 + 3 \cdot 18 = 81$$

これは全域木の個数に等しい。 $3^{\{3-1\}} \cdot 3^{\{3-1\}} = 9 \cdot 9 = 81$.

例題 4 (全域クラスの数)

(3, 3) リカード経済の場合

展張クラスの数 M 個の集合に 0 個の場合を含めて $N-1$ の石を配布する場合の数に等しい。

☆各配布は、展張クラスの各項から 1 を引いたものに対応する。

たとえば、(3, 3) リカード経済の場合

展張的クラス (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3)

対応の配布 (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)

これは、一般に成立する。

3.2 全域木に対応する国際価値

例題 5 (リカードの数値例)

リカードが用いた数値例

	毛織物 1	葡萄酒 2
イングランド A	100	120
ポルトガル B	90	80

これは 2 国 2 財のもっとも簡単な貿易経済の一例である(従来の解釈に問題があることは田淵太一(2006)第 3 章をみよ)。

これに対応する全域木は

(A12 B1)、(A12 B2)、(A1 B12)、(A2 B12)

の4つ。

(1) (A12 B1)のとき

イングランドの賃金を年9ポンドとすると、(A12 B1)では

$$p1 = 100 \cdot 9 = 900$$

$$p1 = 120 \cdot 9 = 1080$$

$$p1 = 900 = 90 wB \text{ よって } wB = 900/90 = 10.$$

これより国際価値(w,p)は、(9, 10, 900, 1080)となる。

このとき、ポルトガルにおける葡萄酒の原価は、 $80 \cdot 10 = 800$ であり、これは $p2 = 1080$ より小さく、B2(ポルトガルの葡萄酒生産)において超過利潤が生じている。

(2) (A12 B2)のとき

$wA = 9, p1 = 900, p2 = 1080$ ば同じ。このとき、B2が競争的となる条件

$$p2 = 1080 = 80 \cdot wB$$

より、 $wB = 13.5$ 。

国際価値は (9, 13.5, 900, 1080) となる。このとき、

B1(ポルトガルの毛織物生産)の原価は、 $90 \cdot 13.5 = 1215$ で不採算。

よって、この国際価値は認容。

(3) (A1 B12)のとき

$wB = 10$ とおくと、

$$p1 = 90 \cdot 10 = 900, p2 = 80 \cdot 10 = 800.$$

このとき、A1が競争的となる条件は

$$100 wA = p1 = 900. \text{ よって、 } wA = 9.$$

国際価値は (9, 10, 900, 800)

イングランドの葡萄酒生産原価は $120 \cdot 10 = 1200 > 800$ 。

よって、この国際価値は認容。

(4) (A2 B12)のとき

$wB = 10$ とおくと、 $p1 = 900, p2 = 800$ は(3)と同じ。A2が競争的であるためには

$$120 wA = 800. \text{ よって、 } 6(2/3) =: 6.66. \text{ (=: は近似的に等しいという記号)}$$

このとき、A1産業では

$$100 \cdot 20/3 = 2000/3 = 666(2/3) < 900.$$

したがって、イングランドの毛織物産業では超過利潤が生じている。

(考察)

①任意に与えられた投入係数行列 A に対し、各全域木は(定数倍を除いて)ひとつの国際価値を定義する。

②同じクラスでは、認容な国際価値はひとつのみ。

(2,1)タイプの全域木は(A12 B1)と(A12 B2)とがあるが、認容なものは(A12 B2)のみ。

(1,2)タイプの全域木は(A1 B12)と(A2 B12)とがあるが、認容なものは(A1 B12)のみ。

3.3 2つの全域木

[命題 3.1](2つの全域木の和グラフ)

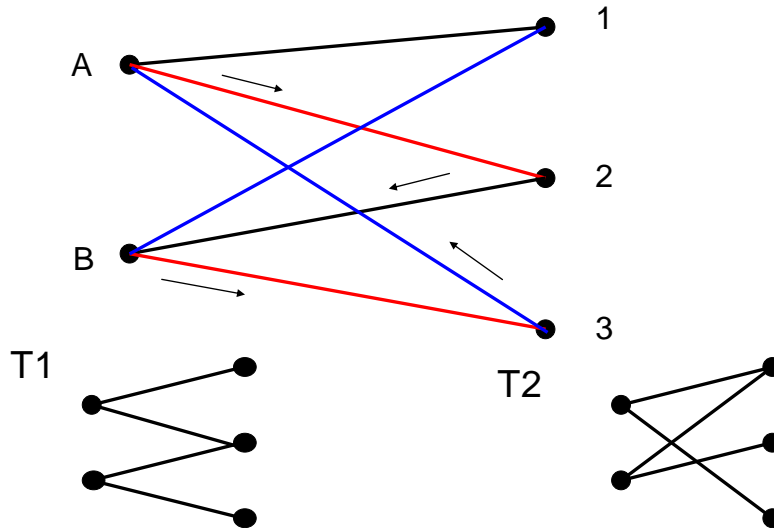
自明でない完全2部グラフ $K_{m, n}$ において、2つの全域木 T_1 および T_2 とを取る。 T_1 と T_2 とが等しくない場合、その和グラフ $T = T_1 \cup T_2$ は T_1 および T_2 に属する辺の和集合によって定義される二部グラフとする。これらは、連結で、かつ閉路をもつ。この閉路は、 T_1 のみに属する辺と T_2 のみに属する辺をかならずもつ。

この命題は、第4節の補助定理 4.3 でより精密な形で再定式化される。得られたグラフを結合有向グラフとよぶ(定義 4.4)。

例 5. 2つの全域木に含まれる閉路

2国3財のリカード経済に対応する二部グラフ $K_{2,3}$

閉路の一例: A2B3A



第3図

注意: 第3図に示した閉路 A2B3A 外にも、A1B2A、A1B3A、A3B1A、A3B2A といった閉路も存在する。どのような閉路をとろうと、閉路には $T1$ のみに属する辺と $T2$ のみに属する辺が存在する。(A2B3A と A3B2A とは、向きが反対だけで、同じ閉路を定義している。)

(命題 3.1 の証明) $T1$ と $T2$ とが等しくない場合、 T には $T1$ の元でない辺を含む。 $T1$ は全域木だから、それに辺を加えたものは、木ではありえない。したがって、 T はすくなくともひとつ閉路をもつ。 T は $T2$ の元ではあるが、 $T1$ の元でないものが含まれる。そうでなければ、 T の辺はすべて $T1$ に属することになる。 $T1$ は木であるから、閉路をもつためには、 $T1$ 以外の辺を含まなければならない。 $T1$ に属するが $T2$ の元ではないものが存在しなければならない。□

3.4 一般の位置にある行列の実例

例6. 一般の位置にある(2,2)行列

(2,2)リカード経済において、正行列 $A = (a_{ij})$ は、

$$a_{11} a_{22} \neq a_{12} a_{21}$$

のとき、一般の位置にある。

(説明) $K_{2,2}$ の左頂点を A, B、右頂点を 1, 2 と名づける。閉路は $C1 = \{A1B2A\}$ と $C2$

= $\{A2B1A\}$ の 2 つしかない(向きの違いを考えなければ、閉路はひとつしかない)。2 つの循環積は、それぞれ

$$\Pi(C1) = a_{12} a_{21} / a_{11} a_{22}$$

$$\Pi(C2) = a_{22} a_{11} / a_{12} a_{21}$$

であり、 $\Pi(C1)$ と $\Pi(C2)$ とは、逆数の関係にある。(これは、おなじ閉路の 2 つの向きと考えると、当然のことである)。したがって、これらが 1 以外の場合に、 A は一般の位置にある。

例 7. 一般の位置にある(2,3)行列

このとき、閉路は $\{A1B2A\}$ 、 $\{A2B3A\}$ 、 $\{A3B1A\}$ の三つが基本閉路集合となる。他の閉路は、これらの閉路の結合として表される。それぞれの循環積を求めると、

$$\Pi(A1B2A) = a_{12} a_{21} / a_{11} a_{21}$$

$$\Pi(A2B3A) = a_{22} a_{31} / a_{12} a_{23}$$

$$\Pi(A3B1A) = a_{32} a_{11} / a_{13} a_{21}.$$

これらが 1 とならないためには、行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

の各 2 列がそれぞれ一次独立であればよい。

例 8. 整数値を取る一般の位置にある行列

任意の(M,N)行列の各要素に、それぞれ異なる素数を割り振ったものを A とする。このとき、いかなる閉路を取ろうと、上因子と下因子とはことなる素数の集合となるから、決して 1 にはならない。したがって行列 A は、一般の位置にある。

3.5 極大競争タイプ

A が一般の位置にある正行列とする。このとき、任意の国際価値 $v = (w, p)$ を取るとき、 $w_i a_{ij} = p_j$

を満たす辺の集合 $c(A, v)$ を競争タイプという。同じ A に対しても、国際価値の取り方により競争タイプは異なるが、それらの中で極大のものが存在する。

[命題 3.3](極大競争タイプ)

一般の位置にある行列 A において極大競争タイプは、全域木である。逆に任意の全域木は、極大競争タイプとなる。

(証明)

競争タイプ C は、閉路を含みえない。その循環積を取ると、1 になるがこれは A が一般の位置にあることに反する。したがって、 C は林であるが、もしそれが全域木でなければ、 C を他の辺で補って全域木 T とすることができる。この T が指定する国際価値 v を取り直せばも $C = c(A, v) = T$ となる。これより、 C は全域木である。

逆に、任意の全域木 T について、 T が定義する国際価値 $v = (w, p)$ が存在する。この価値については、競争タイプ $c(A, v)$ を求めれば、 A が一般の位置にあるという仮定から

$$c(A, v) = T. \quad \square$$

§ 4. 一般的結果の証明

4.1 国際価値の決定

[定理 2.1] (全域木に対応する国際価値)

リカード貿易経済において、 T をある全域木(展張木、連結木)とする。このとき、定数倍を除いて、正の国際価値 $v = (w, p)$ が唯一定まる。

§ 3.2 例題 5 で考察した。

(証明) 国番号の集合 $[M] = \{1, 2, \dots, M\}$ と財番号の集合 $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$ を 2 つの節点集合とする全域木 T が与えられている。任意の国番号、例えば $i_0=1$ をとり、 w_1 を任意の正值に定める。 T は全域木だから、国番号 1 に接続する財番号のひとつを j_1 とする。このとき、財 j_1 の価格 p_{j_1} を

$$p_{j_1} = w_1 a_{1j_1}$$

と定める。次に、たとえば j_1 に接続している国番号のひとつを i_2 として、国 i_2 の賃金率 w_{i_2} を

$$w_{i_2} a_{i_2 j_1} = p_{j_1}$$

で定める。これは単なる一次式であるから、 w_{i_2} は一義に定まる。このようにして、次々と w_i と p_j とを決めていくことができる。 T は全域木だから、国番号 1 から T の辺をたどって任意の財番号 j および国番号 i に到着することかできる。

この決定手続きが矛盾を起こすことはない。もしあるとすれば、すでに値の決まった国番号あるいは財番号に、別の径路を経て接続する辺が存在する場合のみである。しかし、たとえば、それを番号 j としよう。このとき、国番号 1 から財番号 j への 2 つの径路が存在することになるが、これは木 T の内部をたどって閉路が存在することを意味する。木の定義から、そのようなことはありえない。 \square

4.2 いくつかの有用な定義・概念

二部グラフ $R(m, k)$ において、閉路

$$C = \{s(0) s(1) \dots s(K)\}$$

をひとつ定める。

閉路は、どの番号から始まってもよいが、閉路内で国番号から財番号への辺と財番号から国番号への辺を区別し、以下では、閉路はかならず国番号から始まる、おなじ国番号に戻ってくるとする。この慣用により、 $s(0)$ は国番号、 $s(1)$ は財番号とする。

二部グラフの閉路は、かならず偶数の辺からなる。上の場合、 K は偶数で、 $s(K-1)$ は財番号、 $s(K)$ は国番号かつ

$$s(0) = s(K)$$

となっている。

[定義 4.1] (循環積)

リカード貿易経済の閉路 C と国際価値 $v = (w, p)$ とが与えられるとき、循環積 $\Pi(C, v)$ を次のように定める。

$$\Pi(C, v) = \{ps(1)/ws(0) as(0)s(1)\} \{ws(1) as(1)s(2)/ ps(2)\} \cdot \dots \cdot \\ \cdot \{ws(K) as(K)s(K-1)/ ps(K-1)\}$$

(注意) 上は、道(path) について定義されるといったほうがよいだろう。道の最初の元は、つねに国番号から財番号に向うものとする。(これが道の方向付けと考える。)

(注意) 閉路 $\{s(0) s(1) \dots s(K)\}$ のある辺 e が国番号 i から財番号 j に向っているとき、循環積は因子

$$p_j / w_i a_{ij}$$

をもち、辺が財番号 j から国番号 i に向うとき、循環積の因子は

$$w_i a_{ij} / p_j$$

をもつように定義されている。

[命題 4.2] C が閉路のとき、任意の国際価値について循環積は、 w および p の因子が相互に消去されて、

$$\Pi(C, v) = \{a_{s(2)}s(1) \cdot \dots \cdot a_{s(K)}s(K-1)\} / \{a_{s(0)}s(1) \cdot \dots \cdot a_{s(K-2)}s(K-1)\}$$

に等しい。したがって、この値は v に依存せず、 $\Pi(C)$ と書くことができる。

4.3 定理 2.5 の証明

[定理 2.5](一般の位置にある投入係数行列)

(M, N) リカード貿易経済において、一般の位置にある労働投入係数行列は、正の行列の集合の中で開集合をとなし、いたるところ稠密に存在する

(定理 2.5 の証明)

正の M, N 行列 A をひとつ固定しよう。行列 A が一般の位置にないとき、ある 全域木 T と T の辺以外の辺 $e = (h, k)$ とが存在し、 $v = v(T)$ に対し、

$$w_h a_{hk} = p_k$$

となる。 T は全域木であるから、グラフ $T \cup \{e\}$ は閉路 C をもつ。これは二部グラフの閉路だから、通過する辺の個数は偶数であり、かならず辺 e を通る(もし e を通らないのに閉路 C が存在するとすると、 T に閉路が存在することになり、 T が木であることに反する)。

$C = \{i_0, j_1, i_2, \dots, j_K, i_0\}$ とおくと、辺 e 以外の辺については

$$(i_m, j_{m+1}), (j_m, i_{m+1}) \in T$$

であり、これらについては $v(T)$ の定義から

$$w_h a_{hk} = p_k.$$

また、仮定から辺 $e = (i, j)$ についても

$$w_i a_{ik} = p_k$$

が成り立つ。これより C に関する A の循環積 $\Pi(v, C)$ をとると

$$\{a_{i_0} a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{K-1}\} / \{a_{j_1} a_{j_3} \cdot \dots \cdot a_{j_K}\} = 1$$

となる。

これより、 A が一般の位置にあるためには、 K, M, N の任意の閉路 C について、

$$\Pi(A; C) = \{a_{i_0} a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{K-1}\} / \{a_{j_1} a_{j_3} \cdot \dots \cdot a_{j_K}\} \neq 1$$

であることがある。

ところで、任意の閉路 C について、等式

$$\Pi(A; C) = \{a_{i_0} a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{K-1}\} / \{a_{j_1} a_{j_3} \cdot \dots \cdot a_{j_K}\} = 1$$

は恒等式ではない。したがって、閉路 C を固定するごとに、代数方程式

$$\Pi(A; C) = 1$$

を満たす点は、 $M \cdot N - 1$ 次元以下の集合であり、その余集合は、開かつ正の行列の範囲で稠密である。

KM, N の閉路の数は有限であるから、すべての閉路 C について方程式 $\Pi(A; C) = 1$ を満たす点を取り除いても、残った集合は正行列の中で開かつ稠密である。 \square

4.4 定理 2.8 の証明

[定理 2.8]

リカード貿易経済が一般の場合であるとする。ある全域木 T を取るとき、もし $v(T)$ が認容でなければ、同じクラスの全域木 T^* が存在して、 $v(T^*)$ の超過利潤をもつ辺の数がひとつ少ないものが存在する。

例題 3 (超過利潤をもつ技術の削減)

例題 国番号と財番号を区別するため、国番号を $\{A, B, C\}$ 、財番号を $\{1, 2, 3\}$ とする。

全域木 $T = (A12, B13, C2)$ に対応する国際価値 $(w_A, w_B, w_C, p_1, p_2, p_3)$ について

$$\begin{aligned} w_A a_{A1} &= p_1 & w_A a_{A2} &= p_2 & w_A p_{A3} &> p_3 \\ w_B a_{B1} &= p_1 & w_B a_{B2} &> p_2 & w_B a_{B3} &= p_3 \\ w_C a_{C1} &< p_1 & w_C a_{C2} &= p_2 & w_C a_{C3} &< p_3 \end{aligned} \quad (4-1)$$

という等式・不等式が成り立っていたとする。このとき、辺 $(C3)$ が超過利潤となっている。このとき、全域木 $T^* = (A12, B13, C3)$ を考える。

T^* に対応する国際価値を $v^* = (u_A, u_B, u_C, q_1, q_2, q_3)$ とする。定義から、これらは等式

$$\begin{aligned} u_A a_{A1} &= q_1 & u_A a_{A2} &= q_2 \\ u_B a_{B1} &= q_1 & u_B a_{B3} &= q_3 \\ u_C a_{C3} &= q_3 \end{aligned} \quad (4-2)$$

を満たす。そこで、辺 $(C3)$ の価格 q_3 と費用 $u_C a_{C3}$ を比較してみよう。

辺 $(C3)$ を含む閉路 $D = C3B1A2C$ が存在することに注意して、 D に関する循環積を取る。

$\Pi(D, v^*)$

$$\begin{aligned} &= \{q_3/u_C a_{C3}\} \{u_B a_{B3}/q_3\} \{q_1/u_B a_{B1}\} \{u_A a_{A1}/q_1\} \{q_2/u_A a_{A2}\} \{u_C a_{C2}/q_2\} \\ &= u_C a_{C2}/q_2. \end{aligned}$$

ここで、 v^* が (4-2) を満たすことを用いた。ところで、同じ閉路について

$$\begin{aligned}\Pi(D, v) &= \{p_3/w_C a_{C3}\}\{w_B a_{B3}/p_3\}\{p_1/w_B a_{B1}\}\{w_A a_{A1}/p_1\}\{p_2/w_A a_{A2}\}\{p_2/w_C a_{C2}\} \\ &= p_3 / w_C a_{C3} > 1.\end{aligned}$$

この計算には関係(4-1)を用いた。ところで、この2つの循環積は等しいから、

$$u_C a_{C2}/q_2 = p_3/w_C a_{C3} > 1.$$

これより、辺(C3)は費用超過である。辺(A3)、(B2)の費用対価格関係が変わらないことは、 v と v^* との決め方から明らかである。最後に、(C1)については、閉路 $E = C_1A_2C$ について上と同様の計算をすれば、

$$\Pi(E, v) = p_1/w_C a_{C1}, \quad \Pi(E, v) = q_1/u_C a_{C1}$$

より、費用対価格関係は変わらない。おなじ閉路の循環積をとっているのに、D では大小が逆転し、E では大小関係が変わらない。なにかだまされているように思うかもしれないが、ここに閉路 D、E の取り方の秘密がある。そのようなまい閉路がかならずあるというのが、証明の要点である。

(定理 2.8 の証明)

ある全域木 T について $v(T)$ を考える。これが認容でなければ、 T に属さない辺 $f=(i, j)$ で $rf(v, f) = p_j / w_i a_{ij} > 1$ (つまり過剰利潤率が正)となるものが存在する。このとき、 $T \cup \{f\}$ は、ただひとつの閉路を含む。その閉路 C を f から初めて

f, e_1, e_2, \dots, e_K かつ

$$f=(s(0), s(1)), e_1=(s(1), s(2)), \dots, e_K=(s(K-1), s_K)$$

とする。このとき、 $v(T) = (w, p) = (w_i, p_j)$ として循環積

$$\Pi(C, v) = \{p_{s(1)}/w_{s(0)} a_{s(0)s(1)}\}\{w_{s(1)} a_{s(1)s(2)}/ p_{s(2)}\} \cdot \dots \cdot \{w_{s(K-1)} a_{s(K-1)s_K} / p_{s(K)}\}$$

を作る。

ここで、仮定から辺 $f = (s(0), s(1))$ は過剰利潤

$$p_{s(1)} / w_{s(0)} a_{s(0)s(1)} > 1$$

をもつ。他の辺は T を構成する元なので、

$$w_i a_{ij} = p_j.$$

よって

$$\Pi(C) = \Pi(C, v) > 1.$$

このとき、全域木 T から辺 $e = (s(0)s(K-1))$ を除去し、 $f = (s(0)s(1))$ を加えたものを T^* とする。

この T^* は、次の性質を満たす。

(1) T^* は全域木である。

(2) T^* と T とは、おなじクラスに属する。

なぜなら、 $(s(0)s(K-1))$ を除去し、 $(s(0)s(1))$ を加えただけであるから、国 $s(0)$ のもつ競争的な技術の数は変わらない。

このとき、国際価値 $v(T^*) = (u, q)$ をとってみよう。この $v^* = (u, q)$ について

$$\Pi(C, v^*)$$

を計算してみよう。定義から

$$\Pi(C, v^*) = \{q_s(1)/u_{s(0)} a_{s(0)s(1)}\} \{u_{s(1)} a_{s(1)s(2)} / q_s(2)\} \cdot \dots \cdot \{u_{s(K-1)} a_{s(K-1)s(0)} / q_s(0)\}.$$

ここで、辺 $(s(0), s(K-1))$ を除き、他の辺はすべて T^* の元であるから

$$q_j = u_i a_{ij}.$$

よって、

$$\Pi(C, v^*) = u_{s(K-1)} a_{s(K-1)s(0)} / q_s(0).$$

しかし、 C が閉路であるから

$$\Pi(C, v^*) = \Pi(C) = \Pi(C, v) > 1.$$

これより、

$$u_{s(K-1)} a_{s(K-1)s(0)} > q_s(0)$$

すなわち、辺 $(s(0), s(K-1))$ は費用超過である。

次に T^* にも T にも含まれない任意の辺を g とする。すなわち、 g は T^* に含まれず、 f とも異なるものとする。 $T^* \cup \{g\}$ は、 g を通る閉路 D をもつ。この D は、 g を除けば T に含まれる (T^* と T の違いは、 f と e とが入れ替わっただけだから)。 $g = (i, j)$ とし、 D はこの辺 g から始まるものとする。それぞれ $\Pi(D, v)$ 、 $\Pi(D, v^*)$ を作ってみよう。

D は g を除けば T に含まれるから、

$$\Pi(D, v) = p_j / w_i a_{ij}.$$

また、 D は g を除けば T^* に含まれるから、

$$\Pi(D, v^*) = q_i / u_i a_{ij}.$$

これらは、ともに等しいから、 T^* にも T にも含まれない任意の辺は、 v と v^* について同時に超過利潤を得たり費用超過であったりする。

これより $v^* = v(T^*)$ は $v = v(T)$ より辺 f の超過利潤が辺 e の費用超過に変わっただけで、他の辺に関する超過費用数は変わらない。よって、 T^* の超過利潤をもつ辺の数は、 T のそれよりも 1 つだけ小さい。 \square

[定理 2.8 の系]

リカード経済が一般の位置にあるとき、任意のクラスにつき、全域木 T が存在して、国際価値 $v(T)$ は認容となる。

(証明)

定理 2.8 から、同じクラスで超過利潤をもつ技術の個数が 1 つだけ少ない全域木が存在する。この手続きを超過利潤の数が 0 となるまで続ければ、国際価値は認容である。 \square

この系は、定理 2.5 の前半部分に当たる。

4.5 定理 2.9 の証明

[定理 2.9]

一般の位置にあるリカード経済において、認容な価値 $v(1) = (w(1), p(1))$ と $v(2) = (w(2),$

p(2)) とがあるとする。このとき、v(1), v(2)を与える全域木 T1, T2 は、異なるクラスに属する。

例題 4 (異なるクラスにある 2 つの全域木)

たとえば、T1 = (A12, B13, C1) が認容の場合

$$wA \ aA1 = p1 \quad wA \ aA2 = p2 \quad wA \ pA3 > p3$$

$$wB \ aB1 = p1 \quad wB \ aB2 > p2 \quad wB \ aB3 = p3$$

$$wC \ aC1 = p1 \quad wC \ aC2 > p2 \quad wC \ aC3 > p3$$

ことなるクラスに属する全域木として T2 = (A12, B3, C23)をとってみよう。

このとき、T1 にあり T2 にない辺は B1、T2 にあり T1 にない辺は A2。ところで B1 を延長する閉路は B1A2C3B が唯一つある。しかし、この場合、B1 と A2 とは、閉路のなかの順番では 0 と 2 であり、同じ偶奇をもつ。すなわち、このとき、B1 が偶数番目、A2 が奇数番目となる閉路は存在しない。このとき、T1 に対応する国際価値と T2 に対応する国際価値とはそれぞれ認容となりうる。

具体的に投入係数行列に数値を入れて計算してみよう。

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 7 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

とするとき、

$$T1 = (A12, B13, C1)$$

にたいして、国際価値は

$$wA = 1 \quad wB = 2 \quad wC = 3 \quad p1 = 6 \quad p2 = 12 \quad p3 = 6$$

となる。

このとき、T1 = (A12, B13, C1) を構成する各辺につき価格と原価とが等しく、かつ

$$A3 \quad p3 = 6 \quad wA \ aA3 = 1 \cdot 7 = 7$$

$$B2 \quad p2 = 12 \quad wB \ aB2 = 2 \cdot 7 = 11$$

$$C2 \quad p2 = 12 \quad wC \ aC2 = 3 \cdot 6 = 18$$

$$C3 \quad p3 = 6 \quad wC \ aC2 = 3 \cdot 6 = 18$$

において、原価はそれぞれ価格より大きい。よって、T1 は認容である。

次に、T2 = (A12, B3, C23) について国際価値を計算すると、

$$uA = 1, \ uB = 4, \ uC = 2, \ q1 = 6, \ q2 = 12, \ q3 = 12.$$

これは

T2 を構成するすべての辺について、価格と原価が等しい。

また、

$$A3 \quad q3 = 12 \quad uA \ aA3 = 3 \cdot 7 = 21$$

$$B1 \quad q1 = 6 \quad uB \ aB1 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$B2 \quad q2 = 12 \quad uB \ aB2 = 4 \cdot 7 = 28$$

$$C1 \quad q1 = 6 \quad uC \ aC1 = 2 \cdot 6 = 12$$

よって、T2 も認容である。

このように、異なるクラスに属する2つの全域木T1とT2とが異なるクラスに属する場合、それぞれに対応する国際価値とともに認容である。 \square

例題4から分かるように(また、生産フロンティアに複数のファセットが存在することから分かるように)、認容は国際価値を与える全域木は複数ある。定理2.8あるいはその系から、同じクラスにはつねにすくなくとも一つ認容な国際価値を与える全域木が存在することがわかっている。定理2.9の要点は、同じクラスには、認容な国際価値を与える全域木はただひとつしかないということにある。

定理2.9を証明するために、以下の補助定理をまず証明する。以下では二部グラフは左頂点集合と右頂点集合とに分かれているものとする。

[補助定理 4.3]

(M,N)完全二部グラフ $K_{M,N}$ のあい異なる2つの全域木 T1 と T2 を考える。任意の左頂点において、T1 と T2 の次数はたがいに等しいとする(同じクラスに属する)。 $T = T1 \cup T2$ の各辺に次のように方向を入れる。

- (1) T1 に属する辺には左頂点から右頂点へ方向を入れる。
- (2) T2 に属する辺には右頂点から左頂点へ方向を入れる。
- (3) T1 と T2 の双方に属する辺には、両頂点の間に向きをことにする2本の辺があるものと理解する。

これにより、T は有向グラフ(oriented graph)となる。このとき、有向グラフ T には空でない有向閉路が存在する。この閉路は、T1 のみに属する辺および T2 のみに属する辺をもつ。

[定義 4.4]

補助定理 4.3 において定義された有向グラフを T1 および T2 の結合有向グラフという。

(注) この補題は、ResearchGate における塩沢の質問

https://www.researchgate.net/post/A_Conjecture_on_Trees_in_a_Complete_Bipartite_Graph_does_two_trees_of_the_same_class_have_a_cycle_with_opposite_orientations に対する Neil J Calkin の証明から示唆されたものである。塩沢の予想と本補題とは同値であるが、本補題は Neil J Calkin の証明の骨子を生かして予想を再整理したものであり、表現の曖昧さが少なくなっている。予想の形では、証明はひじょうにむずが強いものに見えたが、補題の表現にすると、証明はほとんど自明のものになってしまう。

(証明)

T_1 と T_2 とは、同一ではないから、 T_1 の辺で T_2 の辺でないもの e が存在する。それを e_0 とする。 T に入れられた向きに沿って、辺 e_0 から径路を延長していく。すなわち、

$$e_0, e_1, e_2, \dots, e_K$$

を T の向きに沿って延長していく。この延長は、ある偶数 H ($0 \leq H < K$) について

$$e_H, e_{H+1}, \dots, e_K$$

が閉路(すなわち、 $e_H = (i_H, j_{H+1})$ と $e_K = (j_{K-1}, i_K)$ とするとき、 $i_H = i_K$)となるまで続けることができる。これは次の理由による。

T_1 と T_2 とは同じクラスに属するから、任意の左頂点 V は、 T_1 と T_2 の辺を同数もつ。また、 T_2 は全域木であるから、任意の右頂点には、1 本以上の辺がある。このことは、有向グラフのことはでいえば、任意の左頂点の出次数と入次数とは等しく、任意の右頂点は 1 以上の出次数をもつ。このことから、径路は、上のように閉路ができるまで、任意に続けることができる。

まず、 e_0 から出発した径路は、最初にある右頂点 $e(R)$ に到達したとすれば、その点の出次数は 1 以上だから、 $e(R)$ から $e(L)$ への有向辺がある。 $e(L)$ がこれまでたどったどの左頂点とも等しくないとするれば、その入次数と出次数とは等しいから、 $e(L)$ から次の $e(R)'$ へ至る有向辺が存在する。したがって、左頂点に戻ってきたとき、もしそれまでだったどの頂点とも等しくないとするれば、この径路は無限に延長できることになるが、左頂点の個数は有限であるから、かならずある点で $e_H = e_K$ となる。これが求める閉路である。

この閉路が T_1 のみに含まれる辺および T_2 のみに含まれる辺をもつことは、もしどちらかの命題が成立しないとすれば、閉路は T_1 あるいは T_2 の部分グラフということになるが、 T_1 および T_2 は木であるから、そのようなことは不可能である。 \square

(定理 2.9 の証明)

この命題の対偶を証明する。すなわち、もし T_1 と T_2 とが同じクラスに属するとすれば、

$v(T1) = v(T2)$ したがって $T1 = T2$ を示す。

$T1$ を認容な国際価値 $v1$ をもつ全域木とする。すなわち、

$$v(T1) = v1 = (w, p) = (w_i, p_j)$$

とするとき、 $T1$ の任意の辺 (i, j) について

$$w_i a_{ij} = p_j. \quad (1)$$

このとき、 $T1$ に属さないが、 $T2$ に属す任意の辺 $f2 = (i, j)$ について、

$$w_i a_{ij} > p_j \quad (2)$$

とする。

同様に、 $T2$ に対応する国際価値 $v(T2) = v2 = (u, q)$ が認容であるとき、 $T2$ の任意の辺について

$$u_i a_{ij} = q_j. \quad (3)$$

また、 $T2$ に属さない辺 $f1 = (i, j)$ について

$$u_i a_{ij} > q_j. \quad (4)$$

ここで、 $T1$ と $T2$ とが等しくないとして、補助定理 4.3 に保証される閉路 C を取ろう。

この閉路 C につき循環積 $\Pi(C, v1)$ および $\Pi(C, v2)$ を考えよう。まず、

$$\Pi(C, v1) = \{p_j/w_i a_{ij}\} \{w_i a_{ij}/p_j\} \cdot \dots \cdot \{w_j a_{j(S-1)}/p_{j(S-1)}\}$$

について、各辺が $T1$ に属するとき、(1)より因子 $\{p_j / w_i a_{ij}\}$ は 1 に等しい。そうでない辺、つまり $T2$ に属するが $T1$ に属さない辺のとき、因子はその向きから

$$\{w_i a_{ij} / p_j\}$$

となっているが、(2)より、これは 1 より小さい。 C は $f2$ を含むから、すくなくともひとつの辺についてこのことが成立する。したがって、

$$\Pi(C, v1) < 1. \quad (5)$$

次に、 $\Pi(C, v2)$ を考えよう。 $T2$ に属する辺に関係する因子は、(3)より 1 に等しい。 $T1$ に属するが $T2$ には属さない辺に関する因子は、向きを考えると因子

$$\{q_j / u_i a_{ij}\}$$

は、(4) から 1 より大きい。 C は $f1$ を含むからこのような因子はすくなくともひとつある。したがって

$$\Pi(C, v2) > 1. \quad (6)$$

ところで閉路に関する循環積は、定義に用いられる国際価値に依存せず、等しい値をとる。すなわち、

$$\Pi(C, v1) = \Pi(C, v2)$$

でなければならないが、これは(5)および(6)に矛盾する。この矛盾は、 $T1$ と $T2$ とが等しくないことと仮定したことによって生まれた。したがって、同じクラスで認容な国際価値を与える 2 つの全域木は、じつは一致しなければならない。□

§ 5. 全域木とクラス

第 4 節の結果から、同一のクラスには認容な国際価値を与える全域木がただひとつある。では、このようなクラスは、全部でいくつあるだろうか。

(M, N) タイプのリカード経済(あるいは完全二部グラフ)における全域木は $M+N-1$ 個の辺をもっている。したがって、クラスの数、各国に正の整数 $c(M)$ を割り当てるとき、

$$c(1) + c(2) + \dots + c(M) = M+N-1$$

となるような割当の数に等しい。ひとつの割当を C とするとき、

$$D = (d(1), d(2), \dots, d(M))$$

$$\text{ただし、} d(1), d(2), \dots, d(M) \geq 0, d(1) + d(2) + \dots + d(M) = N-1$$

との間には、一対一の対応がある。じっさい、

$$d(i) = c(i) - 1$$

と置けばよい。

ところで、Dのような割当は、国の名前のチケットを N-1 回重複を許して取る組合せ(重複組合せ)に等しい。順列組合せの初等的な定理から、それは

$$(M + N - 2)! / (M - 1)! (N - 1)!$$

に等しい。この値を小さな M, N について計算して表にしたものが第 4 表である。

(M+N-2)/(M-1)! (N-1)!の表

N= \ M=	2	3	4	5
2	2	3	4	5
3	3	6	10	15
4	4	10	20	35
5	5	15	35	70
6	6	21	56	126
7	7	28	84	210
8	8	36	120	330
9	9	45	165	495
10	10	55	220	715

第 4 表

すこし大きな M, N については、かなり速く増大することが分かる。表にはないが、グレアムが研究しようとした 10 国 10 財の場合だと、認容な価格は

48,620、

つまり約 5 万個ある。しかし、これは全域木の総数に比べれば非常に小さい数値であるこ

にも注意する必要がある。

(M,N)タイプの完全二部グラフの全域木の総数は、Scoins の定理により

$$M^{\{N-1\}} \cdot N^{\{M-1\}}$$

であることが知られている(Scoins, 1962; Abu-Abeih 1990)。この証明はあまり簡単でない
ので、ここでは省略する。全域木の数を表としたものが第5図である。

$N^{M-1}M^{N-1}$ の表

$N \setminus M$	2	3	4	5
2	4	12	32	80
3	12	81	432	2,025
4	32	432	4,096	32,000
5	80	2,025	3,2000	1,953,125
6	192	8,748	221,184	4,050,000
7	448	35,721	1,404,928	37,515,625
8	1,024	139,968	8,388,608	$3.20 \cdot 10^8$
9	2,304	531,441	$4.77 \cdot 10^7$	$2.56 \cdot 10^9$
10	5,120	$9.9 \cdot 10^6$	$2.62 \cdot 10^8$	$1.95 \cdot 10^{10}$

注 有効数字以下は切り捨ててある。

第5表

全域木の数と比較すると、クラスの数あるいは異なる認容な国際価値の個数は非常に小さいことが分かる。第6図は、全域木の個数をクラスの数で割ったものである。各クラスに同じ数の全域木があるわけではないが、平均としてひとつのクラスにどれくらいの全域木が含まれるか、おおよその目安となる。ひとつのクラスにおける全域木の個数は、M と N が大きくなると、急速に増大している。

$M^{N-1}N^{M-1}/\{(M+N-2)!/(M-1)(N-1)!\}$ の表

$N= \backslash M=$	2	3	4	5
2	2	4	8	16
3	4	13.5	43.2	135
4	8	43.2	204.8	9,142.2
5	16	135	9142.2	27,901.7
6	32	416.5	3,949.7	32,142.8
7	64	1276	16,725.3	178,645.8
8	128	3888	233,016.8	$9.69 \cdot 10^5$
9	256	1,809.8	$2.89 \cdot 10^5$	$5.17 \cdot 10^6$
10	512	$1.80 \cdot 10^5$	$1.19 \cdot 10^6$	$2.72 \cdot 10^8$

注 有効数字以下は切り捨ててある。

第6表

§ 6. 全域木の相互関係

第2節では、同じ(国別あるいは財別)クラスには、認容な国際価値をもつものはつねにただひとつ存在することをみた。では、異なるクラスに属する全域木の間関係はどうなるのであろうか。

[定義 6.1](共立的)

2つの全域木 T_1 および T_2 について、定義 4.4 で定義した結合有向グラフを T とする。このとき、 T が有向閉路をもたないとき、 T_1 および T_2 は共立可能(compatible)という。

この関係は、対称的ではあるが、かならずしも推移律を満たさない。したがって、共立可能により全域木を分類することはできない。以下の § 6.1 第 8 図の場合($K_{2,3}$ の場合)には、共立的な関係を延長するとすべての全域木がこの関係により連結している。

共立的な関係をもつ全域木のうち、隣接しているという関係を次のように定義する。いま T_1 と T_2 とがクラス C_1 と C_2 に属しているとしよう。 T_1 と T_2 とは共立的であるから、 C_1 と C_2 とは同じクラスに属することはできない。また、それらは共に展張的であるから、

$$C_1 = (c_1, c_2, \dots, c_M) \quad C_2 = (f_1, f_2, \dots, f_M)$$

とするとき、

$$c_1 + c_2 + \dots + c_M = f_1 + f_2 + \dots + f_M.$$

したがって、

$$d(C_1, C_2) = \{|c_1 - f_1| + |c_2 - f_2| + \dots + |c_M - f_M|\} / 2$$

と置くと、

$$d(C_1, C_2) \geq 1$$

となり、これらは展張クラスのあいだの距離となる。 $\{ \}$ を2で割っているのは、 $\{ \}$ 内はかならず偶数となるからである。

6.1 隣接関係

[定義 6.2](隣接的)

2つの共立的な全域木 T_1 と T_2 があるとき、 T_1 の辺で T_2 の辺でないものが1つ、 T_2 の辺で T_1 の辺でないものが1つずつあるとき、 T_1 と T_2 とは隣接的である(隣接している)という。

全域木 T_1 と T_2 とが隣接的ならば、その距離は1である。2つの全域木の距離が1であっても、共立的でなければ隣接的ではない。

[予想 6.3]

2つの全域木 T_1 と T_2 の距離が1であり、かつそれらが共立的ならば、2つは隣接的である。

いまのところ、証明法が分からないので、予想としておく。

例 6.1 隣接関係: (2,2)リカード貿易経済の場合

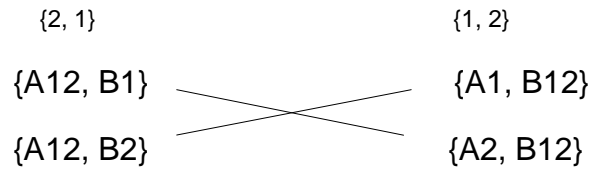
全域木は

$$\{A_{12}, B_1\}, \{A_{12}, B_2\}, \{A_1, B_{12}\}, \{A_2, B_{12}\}$$

の4種類ある。これに対し、国別クラスは

$$\{2, 1\} \text{ と } \{1, 2\}$$

の2種類あり、次の関係がある。



第7図

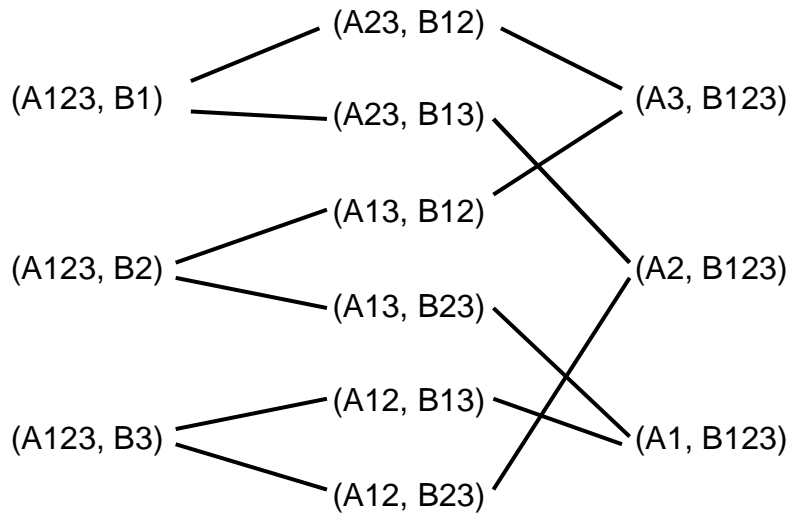
この場合、全域木は、たがいに交わらないふたつの類に類別される。

例 6.2 隣接関係: (2,3)リカード貿易経済の場合

全域木は 12 個あり、国別展張クラスは

$\{3, 1\}$ 、 $\{2, 2\}$ 、 $\{1, 3\}$

の 3 種類ある。このとき、各全域木について、以下の第 8 図の隣接関係がある。



第 8 図

左から右、あるいは右から左へ方向に進む場合、共立関係は推移的である。しかし、左端あるいは右端の全域木は、クラス $\{2, 2\}$ の複数の全域木に共立的であるので、共立的な関係は推移的ではない。なお、国の数が 3 以上となると、クラスを直線的に並べる自然な順序は存在しない。したがって、この観察は、 $M \geq 3$ の場合には拡張できない。

隣接関係図が求まると、多くのことが分かる。たとえば、ある労働投入係数行列 A において $(A23, B12)$ が認容であるとする、クラス $\{3, 1\}$ の認容な全域木は $\{A123, B1\}$ に限られる。これは他の $\{2, 2\}$ クラスについても同様である。それに対し、クラス $\{3, 1\}$ の認容な全域木が分かっても、隣接する 2 つの全域木のどちらが認容となるかは、不定であり、行列 A を指定しないと、認容なものがどちらであるか確定しない。

共立的小よび隣接的という関係は、生産可能集合の極大フロンティアでの関係を想定して採用された用語である。しかし、それらの関係については、§ 8 まで延期される。このような不確定性があるが、生産可能集合の極大フロンティアに言及することなく、隣接的關係を定義でき、かつ計算できることは、国際価値論が極大フロンティアの概念と相当程度に独立であることを意味する。

一般の位置にある (M, N) 行列 A をひとつ固定するとき、各クラスには認容な全域木とそれ

に対応する国際価値がただひとつ存在し、それらはたがいにあい異なる。したがって、 A には、

$$(M + N - 2)! / (M - 1)! (N - 1)!$$

個の異なる認容な全域木と国際価値とがある。

[予想 6.4](隣接木の数) ???

(M, N) 行列 A において、ある認容な全域木に対する隣接する全域木は、 M および N 以下である。

(説明) これは TP^M の hyperplane が領域を M 個の分割することに関係していると思われる。Ardila and Develin の Figure 1 をみよ。

6.2 特性タイプ集合の性質 *(この節は備忘録的なものである。スキップすること)

[定義 6.5](特性タイプ集合)

(M, N) 行列 A が一般の位置にあるとき、各展張クラスに対応する認容な国際価値をもつ、 $(M + N - 2)! / (M - 1)! (N - 1)!$ 個の全域木の集合を A の特性タイプ集合という。

[定理 6.6](トロピカル・オリエンテッド・マトロイド)

特性タイプ集合は、あるトロピカル・オリエンテッド・マトロイド(t -マトロイド)の頂点集合である。すなわち、特性タイプ集合に属するすべてのタイプの細分の集合は、Ardila and Develin の定義による t -マトロイドである。

(説明) これはある労働力ベクトル q をもつリカード貿易経済の生産可能集合の極大面の作る競争タイプの集合であり、これを \log 関数で転換すれば、トロピカル超平面アレンジメントに対応する。したがって、これは t -マトロイドである。

定理 6.6 を、組合せ論的な扱いのみによって、 t -マトロイドであることができると予想される。

T -マトロイド M については、その以下の 5 つからなる公理系がある(Ardila and Develin)。

- (1) 境界(boundary)
- (2) 削除(elimination)
- (3) 両立(compatibility)
- (4) 周囲(surrounding)

このうち(1)と(4)は、全域木の集合から派生する性質である。(3)の両立公理は、2つの全域

木の共立関係と同値と思われる(証明せよ)。そこで、5つの公理のうち、重要なのは(2)の削除公理のみである。この公理は、タイプ集合の性質として、以下のように定式かされている。

[削除公理]

M の二元 A, B と座標 $i \in [m]$ があるとき、M には次の性質を満たす競争タイプ C が存在する。

$$C_i = A_i \cup B_i, \quad C_k \in \{A_k, B_k, A_k \cup B_k\} \quad \forall k \in [m].$$

この公理を全域木の言葉に翻訳するとき、どのような主張となるのであろうか。

§ 7. 生産可能集合の極大フロンティアとの関係

リカード貿易経済 $E = \{A, q\}$ を考える。この経済の世界生産可能集合 P は以下で定義される。

$$P = \{x = (x_j) \mid x_j = \sum_i s_{ij}, \sum_j s_{ij} a_{ij} \leq q_i, s_{ij} \geq 0\}$$

いま、T を $K_{m,n}$ の全域木とすると、

$$B(T) = \{x = (x_j) \mid x_j = \sum_i s_{ij}, \sum_j s_{ij} a_{ij} = q_i, s_{ij} \geq 0, (i,j) \notin T \Rightarrow s_{ij} = 0\}$$

と定義する。このとき、次の定理が成り立つ。

[定理 6.7]

T が認容な全域木のとき、B(T) は P の極大境界の側面(facet)である。

(証明)

まず、B(T) の任意の元は、P の元である。じっさい、B(T) の元は、P の元である条件に

$$(i,j) \notin T \Rightarrow s_{ij} = 0$$

という条件が付加されただけである。さらに B(T) の任意の元 x は、 $\langle x, p \rangle = \langle q, w \rangle$

という等式を満たす。これは付加条件 $(i,j) \in T$ なら $p_j = w_i a_{ij}$ より従う。じっさい、 $x \in$

B(T) で

$$x_j = \sum_i s_{ij}, \quad \sum_j s_{ij} a_{ij} = q_i, \quad s_{ij} \geq 0 \quad \text{とすると、}$$

もし $(i,j) \notin T$ なら、 $s_{ij} = 0$ だから

$$\begin{aligned} \langle x, p \rangle &= \langle \sum_i s_{ij}, p_j \rangle = \sum_j \sum_i s_{ij} w_i a_{ij} = \sum_i w_i \sum_j s_{ij} a_{ij} \\ &= \sum_i w_i q_i = \langle w, q \rangle. \end{aligned}$$

よって、 $B(T)$ の元は、超平面 $\langle x, p \rangle = \langle q, w \rangle$ の元である。

次に、 P の任意の元 x は、不等式

$$\langle x, p \rangle \leq \langle q, w \rangle$$

を満たす。これは、 T が認容であり、 $(w, p) = v(T)$ と任意の (i,j) に関し、

$$w_i a_{ij} \geq p_j$$

が成り立つことより従う。じっさい、

$$\begin{aligned} \langle x, p \rangle &= \langle \sum_i s_{ij}, p_j \rangle \leq \sum_j \sum_i s_{ij} w_i a_{ij} = \sum_i w_i \sum_j s_{ij} a_{ij} \\ &\leq \sum_i w_i q_i = \langle w, q \rangle. \end{aligned}$$

これより、超平面 $\langle x, p \rangle = \langle q, w \rangle$ は P の面の定義超平面であることがしたがう。

ところで、 T は全域木であるから、任意の j につき $(i,j) \in T$ となる i が存在する。この (i,j) につき、 $x^{(j)}$ を j 座標のみ $y_j = q_i/a_{ij}$ 、他はすべて 0 とするベクトルとすると、

$$\{x^{(j)}\}_{j=1, \dots, N}$$

は一次独立である。したがって、 $B(T)$ は $N-1$ 次元を張っている。これより、超平面 $\langle x, p \rangle = \langle q, w \rangle$ が定義する面は、 $N-1$ 次元の P の側面である。これが極大境界のいちぶを那須ことは、法線ベクトル p が正であることより従う。□

以上から、認容な全域木が指定する国際価値は、世界生産可能集合の極大境界のある正則領域に対応する正則な国際価値であることが分かる。したがって、正則な国際価値は、世界生産可能集合の極大境界上で定義しなくてもよいことになる。したがって、正則な国際価値という概念は、生産可能集合の内部においても有効な概念である。

次節では、生産可能集合の内部において、認容な全域木に対応する国際価値について考える。

§ 8. 生産可能集合内部の点における国際価値

本節では、生産可能集合 P の極大境界に世界生産点と世界需要とがあることを仮定せずに、 P の内部に経済がある場合に、国際価値についていかなることがいえるかを検討する。本節では、主として価格について考察し、次節で賃金率ベクトルについて考察する。

これまでの議論の都合上、考察する経済は M 国 N 財のリカード貿易経済 (A, q) に限定する。生産可能集合 P の内部の点であっても、ここで競争的に成立しうる国際価値 $v = (w, p)$ には、大きな限定が付く。賃金率・価格体系として、安定したものであるためには、それが認容なものでなければならない。いま、そのような国際価値がひとつ成立しているとする(なぜ、そのような国際価値が成立したかは、ここでは問わない)。国際価値 v によって競争的な技術(国とそこで生産される財の対)の集合を $C(v)$ とする。投入係数行列 A が一般の位置にあるとき、 $C(v)$ はサイクル(閉路)を持たない。ここでは、 $C(v)$ は、全域木で、競争的な技術の個数は、すべてで $M+N-1$ とする。以下では $T = C(v)$ とする。

経済では、 v に関し競争的にのみ生産が行なわれているとすると、経済では T に属する技術のみが稼動している。いま、 T が財クラス $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ に属するとしよう。国クラスに関する定理 2.7 は、財別クラスについても同様に成立する。したがって、財クラス c に属する認容な国際価値とそれを与える全域木とは、一義的に定まる。

問題は、このような生産が成立していたとき、何らかの事情である財 j が不足気味になったとしよう。不足気味という意味は、当該財の需要はあるが、 T に属する財 j を競争的に生産している国の集合を $\{i_1, i_2, \dots, i_h\}$ によっては、必要な需要を満たせない場合をいう。リカード経済では、一国内の労働と資本は移動すると考えられているから、これは i_1, i_2, \dots, i_h 国では、労働力が逼迫していることを意味しよう(他の国がどうなっているかは分からない)。その意味では、これは生産可能集合の極大境界上の点ではない。

いま、具体的に考察するために 4 国 3 財の場合を考えよう。この経済では、財別クラスは

(4,1,1) (3,2,1) (3,1,2) (2,3,1) (2,2,2) (2,1,3) (1,4,1) (1,3,2) (1,2,3) (1,1,4)

の 10 種類がある。各クラスには認容な国際価値と全域木が一義的に定まっている。

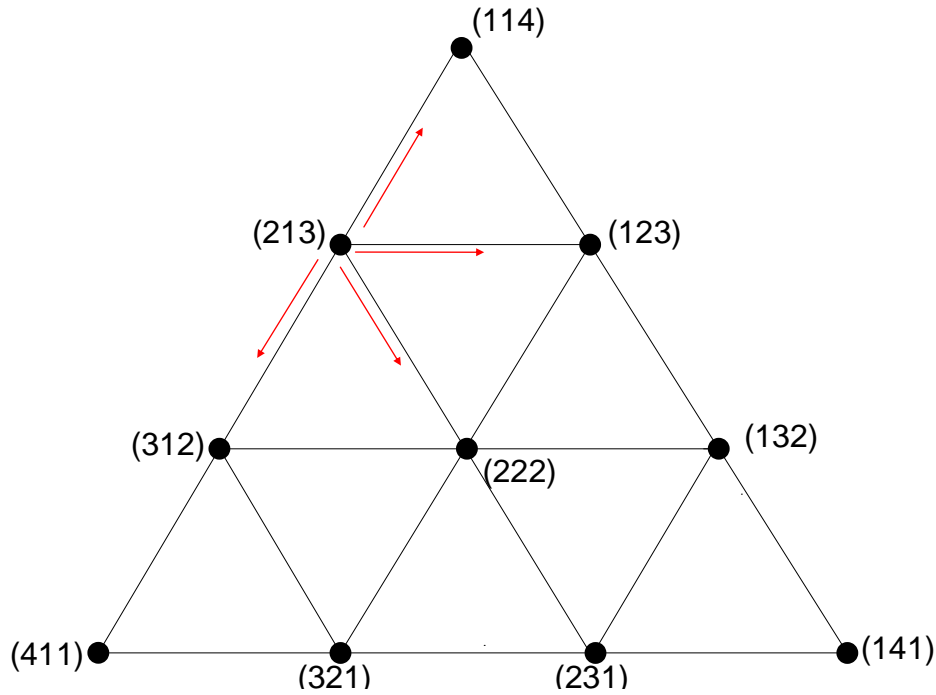
各クラスは、

$$c_1 + c_2 + c_3 = 6$$

という制約を満たす。そこで (x_1, x_2, x_3) という財空間内に

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

を満たす格子点(全ての座標が整数)で、 $x_1, x_2, x_3 \geq 1$ なる点をプロットすると、第9図が得られる。これら格子点のそれぞれに、認容な国際価値と全域木とがひとつずつ張り付いている。



第9図

図では、()内の数字のあいだの , は省略されている。

いま、上に考察してきた生産の財別クラスが $(2,1,3)$ としよう。このクラスに属する認容な国際価値と全域木とをそれぞれ $v(0)$ および $T(0)$ とする。いま、国際価値 $v(0)$ においてある財が逼迫しているとしよう。どの財が逼迫するかで、方向が4つに分かれる。

- (1) 第1財が逼迫する場合
- (2a) 第2財が逼迫しているが、第3財に余裕がある場合
- (2b) 第2財が逼迫しているが、第1財に余裕がある場合
- (3) 第3財が逼迫している場合

たとえば、状況が(2b)であるとする、経済が $(2,2,2)$ に移ったとしよう。このとき、この財

別クラスにただひとつの認容な国際価値 $v(1)$ と全域木 $T(1)$ とが存在する。このクラスでは、認容な国際価値は、これのみであるので、もし新しい状況で認容な価値が成立するなら、第 2 財の逼迫により

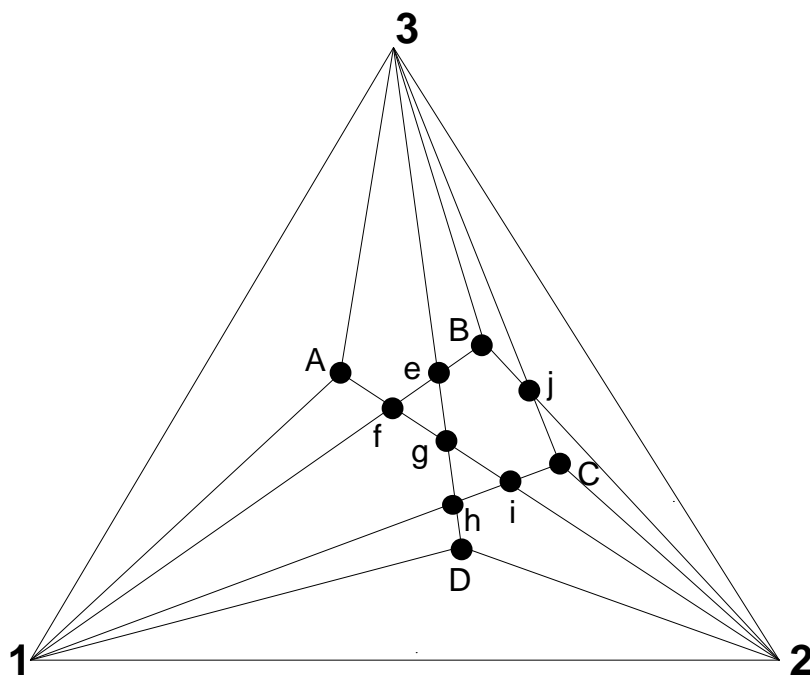
国際価値は $v(0)$ から $v(1)$ へ、競争パターンは $T(0)$ から $T(1)$

へ変化する。

このような変化は、その財が逼迫するかで変化の様相が異なるが、認容な国際価値 $v(0)$ から他の認容な国際価値へと変化する事、競争パターンも $T(0)$ から別の競争パターンに変化することがわかる。

一般の位置にある労働投入係数行列 A が与えられているとき、それぞれの財クラスにたいし、それぞれひとつの認容な国際価値と全域木とが対応しており、ある財の逼迫により、全域木で指示される競争タイプの変化がおこる。もし、 A が具体的に与えられるなら、各クラスに対応する競争タイプも原理的には計算可能である。

この点を確認するために、具体例をひとつ示そう。 A を与える代わりに、その重心座標表示を第 10 図に与える。



第 10 図

第 10 図は、次のように構成されている。まず、正三角形の各頂点は第 1 財、第 2 財、第 3 財の極を示す。すなわち、1 と記された頂点では、価格は(1,0,0)、2 と記された頂点では価格は(0,1,0)、3 と記された頂点では価格は(0,0,1)という状態にあり、正三角形の内部の一点は、 (p_1, p_2, p_3) で表される。ただし、

$$p_1, p_2, p_3 > 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1。$$

ひとつの国の労働投入係数が (a_1, a_2, a_3) のとき、価格 (p_1, p_2, p_3) と (a_1, a_2, a_3) とが比例する。これに $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ という条件を満たすために、 $s = a_1 + a_2 + a_3$ と置くと、

$$p_1 = a_1/s, \quad p_2 = a_2/s, \quad p_3 = a_3/s$$

となる。第 10 図の頂点 A, B, C, D は、それぞれ A 国、B 国、C 国、D 国の労働投入係数ベクトルを代表している。

このように頂点を取る意義は、次のところにある。まず、まず価格 $p = (p_1, p_2, p_3)$ を価格単体内に任意に与えよう。このとき、各国の賃金率 w_A, w_B, w_C, w_D はどうなるであろうか。

第 i 国第 j 財の労働投入係数を a_{ij} とすると、

$$w_i a_{ij} = p_j \quad \text{あるいは} \quad p_j/a_{ij}$$

と決めるのが妥当であろう。しかし、労働投入係数 A が所与のとき、

$$\{p_j/a_{ij}\} \quad j=1, 2, 3$$

が一定の値となるとは限らない。i=A と固定するとき、

$$\{p_j/a_{ij}\} \quad j=1, 2, 3$$

がただ一点であるのは、

$$(p_1, p_2, p_3) \propto (a_{A1}, a_{A2}, a_{A3})$$

の点のみである。頂点 A は、このような特性をもつ価格単体のただひとつの点である。

このように頂点 A を決めるとき、A 頂点と頂点 1 とを結ぶ線分上では、

$$p2/aA2 \text{ と } p3/aA3 \text{ とが等しく、 } p1/aA1 \text{ はそれらより大きい。}$$

もし、

$$wA = p2/aA2 = p3/aA3 \text{ とおくと、 } wA aA1 < p1$$

$$wA = p2/aA2 < p1/aA1 \text{ } \rightarrow wA < p1/aA1 \text{ } \rightarrow wA aA1 < p1$$

すなわち、この線分上では、A1 と A2 産業は等しく競争的でありうるが、A1 産業は超過利潤を得ることになる。同様に、A 頂点と頂点 2 とを結ぶ線分上では

$$p1/aA1 \text{ と } p3/aA3 \text{ とは等しく、 } p2/aA2 \text{ はそれらより大きく、}$$

A 頂点と頂点 2 とを結ぶ線分上では

$$p1/aA1 \text{ と } p2/aA2 \text{ とは等しく、 } p3/aA3 \text{ はそれらより大きい。}$$

したがって、線分上 A2 上では、A1 と A3 産業は等しく競争的でありうるが、A2 産業は超過利潤を得ることになり、線分上 A3 上では、A1 と A2 産業は等しく競争的でありうるが、A3 産業は超過利潤を得ることになる。さらに、これら頂点と 3 つの線分意外の点をとってみよう。

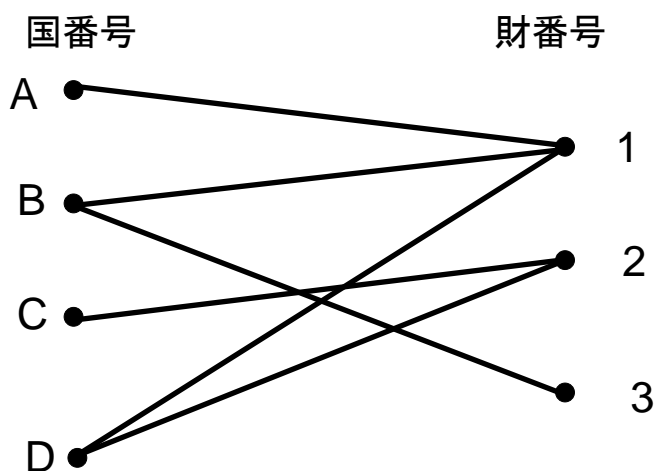
A を頂点とする三角形 A12 では、まず線分 A1 に関して $p2/p3 < aA2/aA3$ 、また線分 A2 に関して $p1/p3 < aA1/aA3$ が成り立つ。よって、 $wA = p3/aA3$ とおくと、

$$p1 < wA aA1 \text{ かつ } p2 < wA aA2$$

となる。これは、A3 を競争的とするとき、A1, A2 は競争的でありえないことを意味する。しかし、この場合、他の費用・価格関係が適当なら、認容な価格となりうることを意味している。同様の関係が A を頂点とする三角形 A23、A31 についてもなりたつ。他の B, C, D

を頂点とする三角形についても同様である。

点 A, B, C, D が一般の位置にあるとき、それぞれの点と正三角形の各頂点とを結ぶ線分とは、ことなる位置で交わる。それらの交点を図のように e, f, g, h, i, j とする。たとえば、第 10 図の e 点を取ってみよう。点 e での価格を(p1, p2, p3) としよう。この点は、線分 B1 と線分 D3 上にあるから、B2 と B3 および D1 と D2 とが競争的となりうる。また、頂点 A との関係から A1 は競争的でありうる。同じように頂点 C との関係から C2 は、競争的でありうる。これら競争的でありうる関係の集合を $G = \{A1, B1, B3, C2, D1, D2\}$ とすると、国頂点集合と財頂点集合とからなる二部グラフとなる。このグラフを描いてみると、第 11 図となり、全域木である。



競争タイプ $\{A1, B1, B3, C2, D1, D2\}$ のグラフ

第 11 図

すでに示したように全域木は、A に付随する一義の国際価値 $v = (w, p)$ を定義する。点 e の価格 (p1, p2, p3) がこのような国際価値の価格部分を与えていることも分かる。このとき、競争的との関係から

$$w_A a_{A1} = p_1, w_B a_{B1} = p_1, w_B a_{B3} = p_3, w_C a_{C2} = p_2, w_D a_{D1} = p_1, w_D a_{D2} = p_2$$

を満たすこと分かる。さらに G に属さない産業 A1, A2, B2, C1, C3, D3 について調べてみよう。

まず、 $w_A a_{A1} = p_1$ のとき、 $w_A a_{A2} > p_2$, $w_A a_{A3} > p_3$ となり、費用が価格を上回ることが分かる。同様に、 B_2, C_1, C_3, D_3 についても、これら産業では費用が価格を上回る。したがって、 G が定める国際価値は、認容である。

同様のことは、他の交点 f, g, h, i, j についても成り立つ。

このような考察は、 M 国 N 財の任意のリカード貿易経済について成立する。第 10 図のような図形を価格単体のサブトロピカル配置(サブトロピカル・アレンジメント)とよぶ。上にみたように、サブトロピカル配置とリカード貿易経済の競争関係の分析は、ひじょうに深い関係にある。サブトロピカル配置は、トロピカル配置の特殊な形である。トロピカル配置については、トロピカル代数との関係ですでにこの 20 年以上、さまざまな考察がある。したがって、トロピカル代数の諸結果から、リカード貿易経済についても多くの知見が得られる(Shiozawa 2015 参照)。

第 10 図では、競争タイプが全域木になるような価格は、これら $A, B, C, D, e, f, g, h, i, j$ の 10 点で与えられる。さらにいえば、認容な国際価値に対応する価格の範囲は、線分 Af, Bh と三角形 fge 、三角形 ghj および六角形 $eghiCjB$ 上の任意の点である。しかし、上に列挙した 10 点を除いては、これらの点は生産可能集合の極大境界のファセットに対応するものではなく、国際価値の競争パターンは、全域木にはならない(これらの競争パターンの作るグラフは、 $K_{3,4}$ の各頂点を含んでいるが、連結ではない。しかし、閉路を持たない)。

10 点の競争パターンとその財別クラスを調べてみよう。頂点の名前、競争パターン、財クラスを各一行に列記すると第 11 表となる。ただし、競争パターンは、正確には $(\{1\}, \{2,3\}, \{2\}, \{1,2\})$ などと書くべきところを $(1, 23, 2, 12)$ などと略して書いてある。これは、 A 国の競争的な財が第 1 財、 B 国の競争的な財が第 2 財と第 3 財、 C 国の競争的な財が第 2 財、 D 国の競争的な財が第 1 財と第 2 財という意味である。

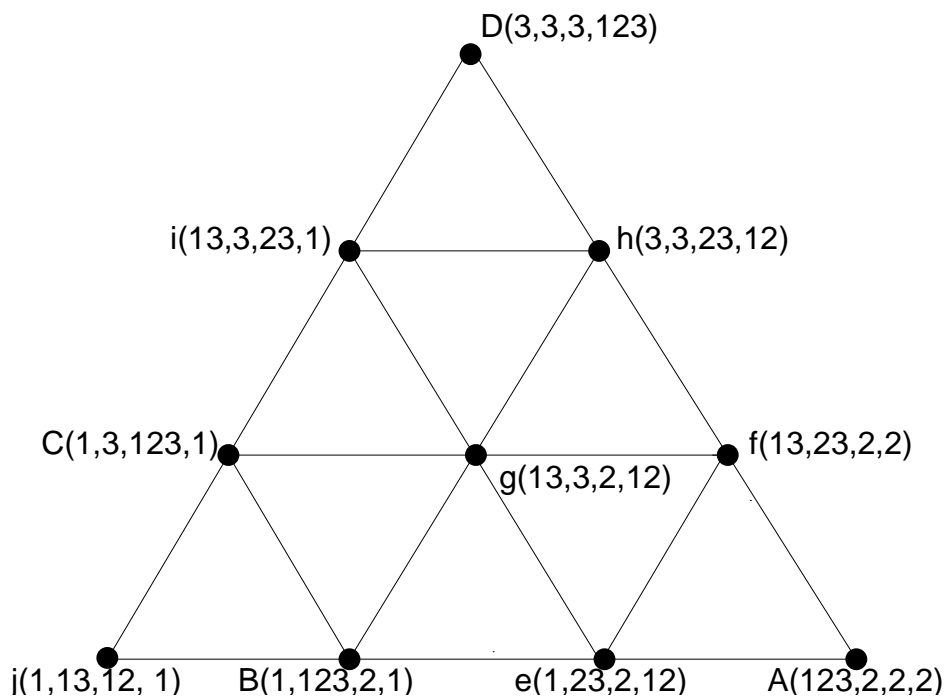
第 12 表 各点の競争パターンと財クラス

点	[国別] 競争パターン				財別クラス			
	座標	A	B	C	D	1	2	3
A	(123, 2, 2, 2)					(1, 4, 1)		
B	(1, 123, 2, 1)					(3, 2, 1)		
C	(1, 3, 123, 1)					(3, 1, 2)		
D	(3, 3, 3, 123)					(1, 1, 4)		
e	(1, 23, 2, 12)					(2, 3, 1)		

f	(13, 23, 2, 2)	(1, 3, 2)
g	(13, 3, 2, 12)	(2, 2, 2)
h	(3, 3, 23, 12)	(1, 2, 3)
i	(13, 3, 23, 1)	(2, 1, 3)
j	(1, 13, 12, 1)	(4, 1, 1)

なお、各点における競争パタンの求め方を点 e を例に書いておこう。点 e が各国の頂点に対し、どの位置にあるかにより、その国の競争的財の集合が定まる。まず、A 国の場合を見てみよう。頂点を A とする三角形分割(サブトロピカル超半平面での分割)において、点 e は頂点 1 の反対側にある小三角形の中にある。この場合、A 国座標の競争的財集合は 1 となり、A 座標(第 1 座標)は 1 となる。B 国については、頂点 1 と B とを結ぶ線分上にある。これは、点 e において B 国第 2 財と第 3 財とに競争的であることを意味する。そこで B 座標を{2,3}(略記して 23)とする。C 国については、頂点を C とする三角形分割において頂点 2 の反対側にある。そこで C 国の競争的財は第 2 財のみである。最後に D 国については、点 e が頂点 3 と頂点 D とを結ぶ線分上にある。この場合、D 国の競争財は第 1 財と第 2 財であり、D 座標は{1,2}となる。簡単な記憶法としては、各国の頂点に関し「反対側」の財頂点が競争的と覚えればよい。

第 12 表の結果をもちいて、第 10 図の各点の競争パターンを書き込んでみよう。そうして得られた結果が第 13 図である。



第 13 図

これで見ると、第 10 図における点(2,1,3)の競争パターンは、 $i(13, 3, 23, 1)$ である。

この競争パターンは、状況に応じて

- (1) では $i(13, 3, 23, 1)$ から $D(3, 3, 3, 123)$ へ
- (2a)では $i(13, 3, 23, 1)$ から $h(3, 3, 23, 12)$ へ
- (2b)では $i(13, 3, 23, 1)$ から $g(13, 3, 2, 12)$ へ
- (3) では $i(13, 3, 23, 1)$ から $C(1, 3, 123, 1)$ へ

と競争パターンを変化させる。

これら変化のうち、 i から C への変化は、第 10 図で見ると、第 2・第 3 財の相対比が変わらず、第 1 財のみが下落している。したがって、第 1 財を競争的に生産する国が増えていることが期待される。じっさい、これは財クラスでいうと、(2,1,3)から(3,1,2)への変化であり、わかりやすい例である。しかし、第 1 財を競争的に生産できる国が増えた分、どれかの財が競争的には生産できなくなる。この場合(i から C への変化)は、第 3 財を競争的に生産できる国の数が 3 国から 2 国に減っている。

また、 i から g への変化は、財クラスでは(2,1,3)から(2,2,2)への変化であるが、この場合の価格変化は、第 1 財と第 3 財の相対比率が同一で第 2 財の価格のみが相対的に下落している。これから、第 2 財を競争的に生産する国が増えることはわかるが、代わりに競争的に生産する国の数がどの財で減少するかは、いちがいにはいえない(この場合は第 3 財、しかし、第 1 財を競争的に生産する国の数が減少する場合もありうる)。

点 i を中心してみると、 i から C 、 g 、 h への変化は、ある特定の財の価格のみが上昇あるいは下落する場合であるが、 i から D への変化のように、3 つの財の相対比が全体として変化する場合もありうる。

なお、第 10 図に与えられた経済は、4 国 3 財と国の数が財の数より大きい特殊な設定となっている。三角形 fge 、三角形 ghj および六角形 $eghiCjB$ のような 2 次元領域が 3 つ現れている。これらは、生産可能集合でいえば、極大境界が内部端点(正象限内の生産可能集合の端点)をもつ場合である。それぞれの領域の競争パターンは、

三角形 fge (1, 3, 2, 2)

三角形 ghj (3, 3, 2, 1)

六角形 eghiCjB (1, 3, 2, 1)

であり、すべて完全特化の場合である。各国の労働力量を与えれば、完全雇用状態では、おのおのただひとつの生産点を与える。このような点では、認容な価格は、第 10 図のそれぞれの三角形あるいは六角形の内部を動きうるが、そのような価格が変化しても、生産量とその比率はかわらない。ただし、このような価格がひとつ選ばれているが、国によって完全雇用でないならば、各財の生産比率は変化しうる。これは、価格変化があっても、需要調節は数量的に行なわれなければならないことを意味している。

このようにある財の価格変化(上昇・下落)と競争的に生産できる財が何カ国で生産できるかという関係だけでも、かなり複雑である。しかし、いくらかのパタンめいたものも観察できる。

たとえば、頂点 3 と D 点とを結ぶ線分上には、e, g, h, D の 4 点が乗っている。これを第 9 図で見ると、折れ線となりっているが、この 4 点では、第 1 財と第 2 財の相対価格は不変である。そして第 3 財を競争的に生産する国数を見ると、e, g, h, D の順に 1、2、3、4 国と順調に増えている。財の相対価格が増えると、競争的な国数が増える一例となっている。この関係は、jC つについても同様である。頂点 2 と A 点上には、i, g, f, A とならでいるが、第 2 財を競争的に生産する国数は、先の順に 1、2、3、4 国と増えている。頂点 1 と C あるいは B を結ぶ線分上でも、同様の事態がみられる。このことをまとめると、二財の価格比が変わらない場合でも、第 3 財の価格変化によって、その二財を競争的に生産できる国数には簡単な規則が認められないが、他の財の価格比を一定としたままで、ある財の価格のみを低下していけば、それにあわせてその財を競争的に生産する財の数は確実に増大する。これを定理としてまとめておこう。

[定理 8.1]

M 国 N 財のリカード貿易経済において、全域木 $T_1 T_2, \dots, T_k$ が認容な国際価値 $v(k) = (w(k), p(k))$ を指定するとする。このとき、ある第 h 財を除くすべての財番号について、 $p(1), p(2), \dots, p(k)$ の相対価格が等しいとする(すなわち、 $p(1), p(2), \dots, p(k)$ は、価格単体の第 h 財頂点から引いた直線 L 上にあるとする)。このとき、 $p(1)_h, p(2)_h, \dots, p(k)_h$ が大きいものから小さいものへならんでいるとすれば、それらに対応する第 h 財を競争的に生産する国数は、単調に増大している。もし、直線 L に他の全域木に対応する認容な価格頂点がないとすれば、この国数は 1 つずつ増大している。

M 国 N 財の一般の場合に証明するには、基礎的な構成から話を組み立てなければならない。

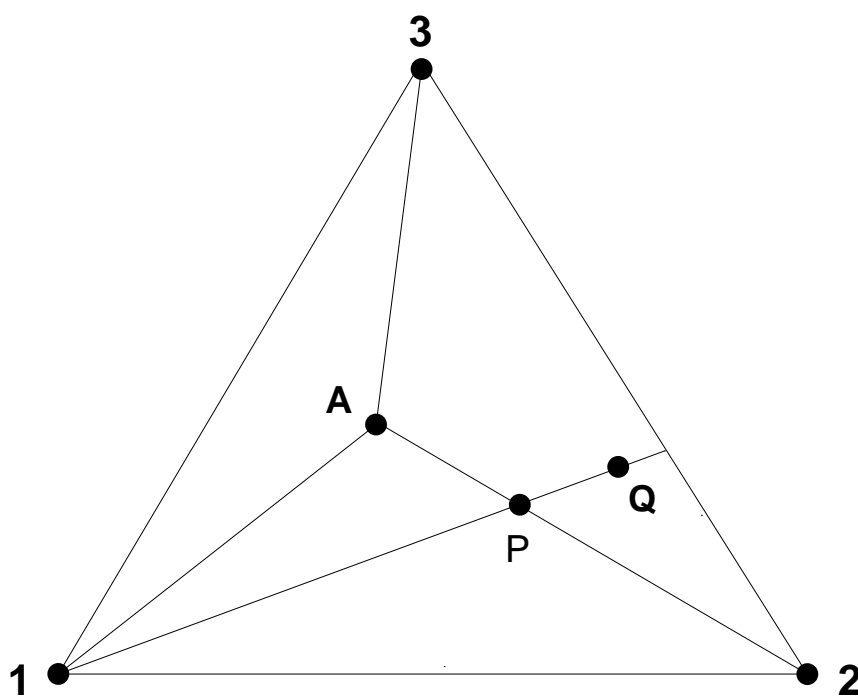
基礎となるのは、価格単体において、各国の頂点をプロットしたとき生まれる、Y字領域(一般の次元では、サブトロピカル超半平面で分割される N 個の領域)の次の性質である。

[補助定理 8.2]

($N-1$)次元単体 Δ のサブトロピカル半空間分割 H において、任意の頂点 J (たとえば 1)から直線 l を引いたとき、 H とはただ一点 P で交わる。また、 l 上で J 点からみて P 点より遠い位置では(重心座標でいえば、 J 座標がより小さいとき)、サブトロピカル半空間分割 H の J 点の対辺に隣り合う領域内にある。

(証明)

2次元単体のときには、図を描けば直観的にすぐわかる(第 13 図参照)。一般の場合には、高次元の図形を想像しにくいだけで、基本は同じである。代数式の大小関係で表されるが、ここでは省略する。 □



第 14 図

[補助定理 8.3]

M 国 N 財のリカード貿易経済に関する価格単体をサブトロピカル分割したもの(超半平面アレンジメント)を $H(A)$ とする。ある点 P の競争パターン T において、ある財 J を競争的に生産できる国の数は、点 P がいくつの J 閉領域(J の対辺に接する領域とその境界)に含まれるかによる。

(証明)

サブトロピカル・アレンジメントが与えられたとき、一点 P の競争パターンは、各国の頂点半空間分割に関し、その点がどの対辺領域にあるかによる。ある財 J に注目すれば、それがこのアレンジメントにおける、競争的な国の数であることが分かる。□

これで定理 8.1 の証明の準備が整った。

(定理 8.1 の証明)

点 $p(1), p(2), \dots, p(k)$ は、それぞれある全域木の指定する認容な国際価値の価格ベクトルであるとし、これらは価格単体の第 h 財頂点から引いた直線 L 上にあるとする。いま代表的に点 $p(1)$ と $p(2)$ とを取ろう。 $p(1)$ が J 財を競争的に生産する国の数を k としよう。これは、 $p(1)$ を h 対辺として含む国頂点が k あることを意味する。直線 L 上では $p(2)$ の h 座標がよりちいさくなると、補助定理 8.2 から $p(2)$ はこれらの国々の h 対辺に入っている。ところで、直線 L 上で $p(1)$ の次に $p(2)$ が新たな全域木対応の認容な価格だとすると、ある新しい国番号 K について、 $p(2)$ はこの国に関する半空間分割の h 対辺閉領域に属し、 $p(1)$ は属さない。また、 $p(1)$ と $p(2)$ の間に別の全域木対応の認容な価格が存在しないとすれば、 $p(2)$ は $p(1)$ にくらべ国番号 K についてのみ、ひとつおおきい h 対辺領域に入っている。補助定理 8.3 より、定理 8.1 をえる。□

価格の動きについては、上のように、価格単体のサブトロピカル・アレンジメントによってある程度の分析が可能である。リカード貿易経済を含むリカード・スラッフア貿易経済について塩沢由典(2014)第 5 章定理 41 より、認容な国際価値の価格 p に対し一義的な賃金率ベクトル w が存在して、 (w, p) は認容な国際価値となる。したがって、価格単体の分析は、各国の賃金率に対しなんらかの情報を与えていることが期待される。しかし、期待に反して、価格単体の分析は、賃金率について基本的にはなにも教えることはでない。

このことは、次のような仮想経済を比較として考えてみればよい。

ある国(たとえば国 i)の労働投入係数ベクトル $a(i)$ に対し、それを $1/\lambda(i)$ 倍したものが労働投入係数とする経済も、その A 国頂点は $a(i)$ と同じ点を頂点とするからである。より一般に、すべての国の労働投入係数ベクトルが $a(i)$ から $1/\lambda(i) \cdot a(i)$ に変化したとしよう。変化する前の国際価値を $v = (w, p)$ とするき、係数の変化後の国際価値は

$$w(\lambda) = (\lambda(1) w_1, \lambda(2) w_2, \dots, \lambda(M) w_M)$$

$$p(\lambda) = p$$

とするとき、国際価値 $v(\lambda) = (w(\lambda), p(\lambda))$ は、係数が変化する前の国際価値 $v = (w, p)$ と同一の競争パターンを示す。

このことから、価格単体において価格が P(1)点から P(2)点へ移動したとしても、そのことによりある国の賃金率が上がったり、下がったりすることを直接に推論することはできない。このことは、しかし、価格単体とは別に賃金率単体を分析することを否定するものではない。2つの単体のサブトロピカル・アレンジ面との頂点たちの間には、おなじ競争パターンをもつという対応によって一対一の対応が付くので、この対応関係を通して、価格の変化と賃金率の変化とを考察することは可能である。次節では、賃金率単体のサブトロピカル・アレンジメントについて考察する。

第9節 生産可能集合内部の点における賃金率ベクトルの変異

第8節で行なった価格に関する考察と同様の考察を賃金率ベクトルについて行なうことができる。第8節では価格単体について考察したが、本節では賃金率単体の考察が中心となる。

賃金率単体で第8節と同様の分析を行なうためには、賃金率単体での頂点の決め方に注意しなければならない。単体の頂点が国番号である。単体の一点は、各国の賃金率 (wA, wB, \dots, wK) を与える。賃金率単体を図示できるためには、国の数が3国以内でなければならない。さらに内部に取るべき頂点は、各財に対応している。いま、第1財の各国の投入係数を $(aA, aB1, aC1)$ としてみよう。価格単体では、国頂点として、 $(aA1, aB2, aC3)$ を取った。これが労働投入係数行列の行ベクトルとすれば、第1財に関する各国の投入係数は列ベクトルである。さらに、価格単体において、頂点では wA がおなじ値を取る点を求めたように、賃金率単体では

$$wA aA1 = p1, \quad wB aB1 = p1, \quad wC aC1 = p1$$

において、 $p1$ が同じ値をとるよう、頂点を取る必要がある。したがって、第1財の頂点は $(wA, wB, wC) \propto (1/aA1, 1/aB1, 1/aC1)$

となる点でなければならない。いま、

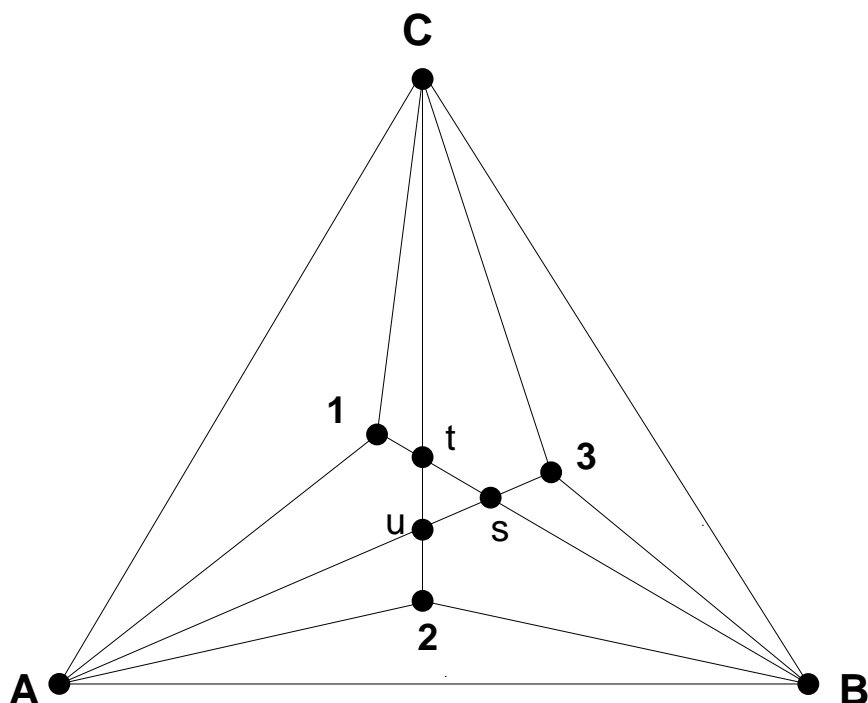
$$s = 1/aA1 + 1/aB1 + 1/aC1$$

すれば、

$$wA = s / aA1, \quad wB = s / aB1, \quad wC = s / aC1$$

という点となる。

前節では 4 国 3 財の場合を考察したが、以下では 3 国 3 財の貿易経済を分析する。財の数を増やすことは容易だが、図が煩雑になるだけである。3 国 3 財理論的には価格単体と賃金率単体とは共役な関係にあり、ほぼ同様の議論ができるが、対象としてはまったく異なる経済であることに注意しよう。



第 15 図

第 15 図は、そのひとつのあり方を示している。ここで認容な国際価値の一部となる賃金率ベクトルは、頂点 1 と頂点 t とを結ぶ線分(両端を含む)、頂点 2 と頂点 u とを結ぶ線分(同)、頂点 3 と頂点 s とを結ぶ線分(同)、および三角形 stu(その周を含む)という集合である(これは、塩沢由典(2007)では「分担的集合」と呼ばれている)。賃金率単体についても、その各点の競争パターンを定義することができる。ただし、賃金率単体の競争パターンは、財別の座標によって表現するのがふつうである。しかし、比較と参考のため、以下では財別表現と国別表現の双方を掲示する。

第 15 図の各頂点の競争パターンは、次のように計算できる。

第 16 表 第 15 図の各頂点の競争パターンとクラス

頂点 座標	財別競争パターン			国別クラス			国別競争パターン			財別クラス		
	1	2	3	A	B	C	A	B	C	1	2	3
1	(ABC, B, B)			(1	3	1)	(1, 123, 1)			(3	1	1)
2	(C, ABC, C)			(1	1	3)	(2, 2, 123)			(1	3	1)
3	(A, A, ABC)			(3	1	1)	(123, 3, 3)			(1	1	3)
s	(AC, A, BC)			(2	1	2)	(12, 3, 13)			(1	2	2)
t	(AC, AB, B)			(2	2	1)	(12, 23, 1)			(2	2	1)
u	(C, AB, BC)			(1	2	2)	(2, 23, 13)			(1	2	2)

財別競争パターンから国別競争パターンを計算するには、次のようにおこなう。たとえば、(ABC, B, B)の国別競争パターンの A 座標を求めるには、財別競争パターンにおいて A が表れる財座標を拾って競争集合を{1}とする。B 座標も同様にして、競争集合は{123}、C 座標は{1}となる。これらを並べて(1, 123, 1)を得る。

賃金率単体のサブトロピカル配置でも、定理 8.1 と同様のことが成り立つ。

[定理 9.1]

M 国 N 財のリカード貿易経済において、全域木 T_1, T_2, \dots, T_k が認容な国際価値 $v(k) = (w(k), p(k))$ を指定するとする。このとき、 $w(1), w(2), \dots, w(k)$ が価格単体のある国 D 頂点からある財 h の頂点に引いた直線 L 上にある(すなわち、D 以外の賃金率ベクトルがすべて比例している)とする。このとき、 $w(1)_D, w(2)_D, \dots, w(k)_D$ が大きいものから小さいものへなっているとすれば、それらに対応する第 D 国が競争的に生産できる財の数は、単調に増大している。もし、直線 L に他の全域木に対応する認容な価格頂点がないとすれば、この財数は 1 つずつ増大している。

第 10 節 リカード・スラッファ貿易経済への拡張可能性について

リカード貿易経済で成り立った定理がリカード・スラッファ貿易経済で成立するとはかぎらない。異なる点の第一は、ある全域木を与えたとしても、それがリカード・スラッファ貿易経済において正の国際価値が係数倍を除いて一義に決定されるとはかぎらない(定理 2.1)。また、任意のクラスにひとつずつ認容な国際価値を与える全域木が存在するとも限らない(定理 2.7)。その意味では、定理として成り立たない事情はいろいろあるが、リカード貿易経済の事例が研究の指針になることはまちがいない。

参考文献

- 塩沢由典(2007)「リカード貿易理論の新構成」『経済学雑誌』(大阪市立大学)107(4): 1-61.
- 塩沢由典(2014)『リカード貿易問題の最終解決』岩波書店。
- 塩沢由典(2015a)「貿易と失業」第3稿、2015.7.1
- 塩沢由典(2015b)「必要労働量という視点」2015.7.8
- 田淵太一(2006)『貿易・貨幣・権力』法政大学出版局。
- Jones, R. 1961 Comparative advantage and the theory of tariffs: a multi-country multi-commodity models. *Review of Economic Review* 20: 27-33.
- Scoins, H.I. 1962 The number of trees with nodes of alternate parity. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society* 58: 12-16.
- Shiozawa, Y. (2015) International trade theory and exotic algebras. *Evolutionary and Institutional Economics Review* 12(1): 177-212.