リカード貿易理論の新構成 ―国際価値論によせてII * ―

塩沢由典 Shiozawa Yoshinori

2006 年 12 月 20 日

概 要

リカードの貿易理論は、経済学の理論としてはもっとも有名なもののひとつである。しかし、180 年以上経ても、この理論の深い内容が全面的に展開されているとは言いがたい。通常の経済学の本では、国際貿易論の最初に紹介されるが、理論の本格的な展開はほとんどなされていない。中間財の貿易がある多数国多数財の場合、多くは数値例としてしか分析されていない。製品価格がその国の賃金率だけでなく世界各国の賃金率に依存するものとなるからである。この論文では、リカード貿易論を、各国の賃金率を所与とした上で、世界全体の最小生産価格を考え、その上で競争条件や数量的な問題について考察する。この方法により、リカード貿易理論の骨格が多数国多数財で、中間財貿易と技術選択がある場合にまで拡張される。新しい構成法によって、貿易の利益ばかりでなく、貿易の不利益をも分析する枠組みが与えられる。貿易下においても各国間の賃金率に大きな差異が生ずる理由が説明できるほか、リカード・ミル以来の論争に新しい光を当てることもできる。

*この論文は塩沢由典 (1985) の続編に当たる。

目次

1　序論

国際貿易の理論には、いくつかの競合的な理論がある。そのうちヘクシャー・オリーン・サミュエルソンの理論の原型は、各国の技術を基本的には等しいとし、賦存資源の差異により貿易の成立と貿易方向とを説明する。これに対し、リカードの比較生産費説は、国ごとに技術係数が異なることから貿易の方向と特化パタンとを説明する。

貿易理論には、しかし、もうひとつの重要な議題がある。それは、各国間の賃金率の差異を説明する問題である。ヘクシャー・オリーン・サミュエルソンの理論では、閉鎖経済では、資源の存在比率の違いにより実質賃金率に大きな差異が生まれうるが、自由貿易のもとでは、要素価格均等化定理により (その定理の仮定が成り立つかぎり) すべての国の賃金率は等しくなる。これでは、貿易の存在の下に現実に存在している賃金率の大きな違いを説明することにならない。これに対し、リカードの貿易理論には、これまであまり注目されてこなかったが、国による賃金率の違いを説明する論理が内在している。これがリカードの貿易理論の大きな特徴であり、国際価値論と呼ぶにふさわしい内容をもっている。ただ、リカード貿易理論を原型である 2 国 2 財という設定では、現実性も一般性も担保されない。本論文では、リカードの貿易理論が多数国多数財で中間財投入と貿易があり、技術選択のある場合にまで拡大できることを示す。

第 1 節では、まず 1.1 項において、リカードの理論の原型とそこに内在する 2 国間の賃金率の関係について説明し、残りの部分で、先行研究と関連理論および本論文の主要成果について概観する。第 2 節から第 5 節までは、リカード理論の新しい構成法を説明し、そこに現れる数学的構造を分析する。これは本質的には多次元における多面体論であり、分析方法としては実線形代数である。必要なほとんどすべての手法は 1950 年代までに開発されたものであるが、近年ではこのような分析は珍しいものとなっているので、煩雑を避けず、なるべく詳しく説明した。二階堂副包 (1961) を超える知識はほとんど要請されない。第 6 節と第 7 では、新しい構成法から得られる経済的含意について 2 つの話題を提供する。塩沢由典 (1985) において 2 国の場合に示された比例的成長経路やそこにおける国際資金移動に関しては、多数国の場合にも同様に展開できるが、ここでは省略する。

1.1　リカード貿易理論の骨格

リカードの与えた数値例は、第 1 表にまとめられる。数値は、毛織物とぶどう酒を各 1 単位生産するのに必要な労働量を示す。リカードは、この単位について説明していないが、暗に毛織物 1 単位とぶどう酒 1 単位とが交換されると仮定されている。

リカードの貿易理論は、ときに比較生産費説とも呼ばれる。これは、毛織物とぶどう酒の生産にかかる労働量の比率が等しくないとき、貿易が起こることをい

表 1: リカードの数値例

	毛織物	ぶどう酒
イギリス	100	120
ポルトガル	90	80

う。第 1 表では、毛織物の生産に要する労働量に対するぶどう酒の生産に必要な労働量は、イギリスでは $120/100 = 1.2$、ポルトガルでは $80/90 = 0.88$ であり、ポルトガルの方がぶどう酒の比較生産性が高い。このとき、貿易はイギリスが毛織物を、ポルトガルがぶどう酒を輸出する形で行われる。

このような貿易にどのような利益があるか。そのために、貿易のあるときとないときで両国の労働量がどう変わるかを見てみよう。例として、イギリスがぶどう酒 8 単位、ぶどう酒 8 単位を生産・消費し、ポルトガルが毛織物 2 単位とぶどう酒 2 単位を生産しているとしよう。ここで、貿易を開始し、イギリスからポルトガルに毛織物を 1 単位、ポルトガルからイギリスにぶどう酒を 1 単位輸出するとする。両国の消費が変わらないとすれば、イギリスの毛織物は 9 単位、ぶどう酒は 7 単位、ポルトガルは毛織物 1 単位、ぶどう酒 3 単位を生産することになる。このとき、両国で必要とされる労働量を表にまとめると第 2 表となる。

表 2: 貿易の有無による労働量の差異

		毛織物		ぶどう酒		労働量計
貿易なし	イギリス	8	800	8	960	1760
	ポルトガル	2	180	2	160	340
貿易あり	イギリス	9	900	7	840	1740
	ポルトガル	1	90	3	240	330

貿易をするとき、両国が毛織物とぶどう酒を同量消費するのに必要な労働投入の総量はイギリスで 20 単位、ポルトガルで 10 単位減少している。労働量の少ないほうがよいとすれば、これが両国の貿易の利益となる。

貿易は、価格関係を媒介にして行われる。そこで、貿易のあるとき、どのような価格体系が成立するか考えてみよう。イギリスからポルトガルに毛織物が輸出されるためには、イギリスの毛織物の価格がポルトガルの毛織物の価格より安くなければならない。反対に、ポルトガルからイギリスへぶどう酒が輸出されるためには、ポルトガルのぶどう酒の価格がイギリスのぶどう酒の価格より安くなければならない。このとき、重要なのは各国の労働者の賃金率である。これが国際的な貨幣単位たとえば金グラムで表されるとしよう。イギリスの労働者の賃金率を W_e、ポルト

ガルの賃金率をW_pとする。また、両国の利潤率は等しく、rだとする。このとき、貿易が起こる条件は$100W_e(1+r) < 90W_p(1+r)$ かつ $120W_e(1+r) > 80W_p(1+r)$。これは整理すると

$$100/90 = 1.11 < W_p/W_e < 120/80 = 1.5 \tag{1}$$

すなわち貿易が行われるためには、ポルトガルの賃金率がイギリスの賃金率より少なくとも 11 %高く 50 %未満という範囲になければならないことを示している。価格競争が厳格にはたらくとすれば、上の場合、イギリスでは毛織物だけを、ポルトガルではぶどう酒だけを生産することになる。これが完全特化の状態であり、逆の特化は起こりえない。

価格競争が厳格にはたらくとすれば、経済全体の需要構成を与えれば、イギリスとポルトガルの賃金率が取りうる関係をより詳細に見ることができる。そのためには、イギリスとポルトガルの両国による生産可能集合を見なければならないが、その概形は図 1 で与えられる。

[パワーポイント資料　図 1]

図 1: リカードの数値例

生産可能集合は、イギリスとポルトガルの労働力の存在量 (の比率) によって計量的な形が変わるが、定性的には非負象限において一点で連結された二つの傾きのことなる線分の左下閉領域である。生産可能集合の右上の境界点の集合を極大境界という。点 A、点 B、点 O をそれぞれ極大境界が x 軸、y 軸と交わる点、原点、点 S を極大境界の屈曲点 (ふたつの線分の共通点) としよう。価格競争が厳格に働き、両国で完全雇用が成立するとき、需要および純生産物は極大境界上の一点となる。その点を C としよう。点 C が線分 AS の内部にあるとき、イギリスは毛織物の生産に完全に特化し、ポルトガルは毛織物とぶどう酒を生産する。このとき、世界価格は閉鎖経済におけるポルトガル価格と同じであり、ポルトガル労働者の賃金率はイギリス労働者の賃金率の $10/9 \approx 1.11$ 倍となる。反対に点 C が線分 SB の内部にあるとき、ポルトガルはぶどう酒の生産に完全に特化し、イギリスは毛織物とぶどう酒とを生産する。世界価格は閉鎖経済におけるイギリス価格に等し

く、ポルトガル労働者の賃金率はイギリス労働者の賃金率の $3/2 \approx 1.5$ 倍となる。世界需要が S 点にあるときは、ポルトガルはぶどう酒に、イギリスは毛織物生産に完全特化する。このとき、価格は式 (1) の範囲で動きうる。

世界需要が S 点にくることは確率的には珍しく[1]、一般には線分 AS か線分 SB 上にある。どちらにくるかは、需要の構成比と 2 国の労働力の存在比率により異なるが、いずれの場合にも、イギリスとポルトガルの賃金率の比率は一義的に定まる。線分 AS であれ、線分 SB であれ、その世界需要がその内点にあるかぎり、需要がすこしばかり動いても、賃金率の比率および世界価格は一定で変わらない。したがって、線分 AS および線分 SB の内部にあるかぎり、価格を変動させることによっては、生産数量の調節はできない。一定価格のもとにおいて、数量調整をしなければならない。第 7 節に見るように、このことは多数国多数財の場合にも一般的に観察される。

価格競争が厳格にはたらき、2 国が完全雇用を達成するのは理想的な場合である。閉鎖経済から貿易を始めるとき、貿易の利益と不利益を考えるには、このような極端な場合 (均衡の場合) でなく、比較対象は、まずは容易に移行可能な状態でなければなない。この比較対象はさまざまに取りうるが、以下では世界全体の需要が絶対値を含めて変わらない場合を考える。

貿易による利益を価格面で見るために、イギリスの賃金率を 8 金グラム、ポルトガルの賃金率を 10 金グラムとしてみよう。両国の利潤率がひとつく 20 %であるとき、貿易をしない状態でのイギリスの価格体系は、毛織物 960 金グラム、ぶどう酒は 1152 金グラムとなる。ポルトガルの価格体系は、毛織物金 1080 グラム、ぶどう酒 960 金グラムである。この状態で貿易を開始し、国際価格は安いほうに統一されるとすると、貿易状態での価格体系は、イギリス、ポルトガル両国ともに毛織物 960 金グラム、ぶどう酒 960 金グラムとなる。

貿易の開始前と後の同一労働で買い取れる財の数量を計算してみよう。毛織物とぶどう酒の単位を 1000 分の 1 に取り直すして表示すると第 3 表が得られる。貿易開始により、両国の労働者は、貿易前よりも少なくともひとつの財の購入量を増やすことができる。これが労働者にとっての貿易の利益である。

表 3: 同一労働の対価で得られる財の数量 (単位は 1000 分の 1)

		毛織物	ぶどう酒
貿易前	イギリス	8.33	6.94
	ポルトガル	9.26	10.42
貿易後	イギリス	8.33	8.33
	ポルトガル	10.42	10.42

[1] 線分上に長さをもとに確率密度を定義すれば、確率 0。ただし、効用関数などを考えて最大化する定式では、効用関数を定めるパラメータの取り方に依存するが、確率は一般には正となる。

このように、働く労働者にとって、貿易は利益は同じ労働量で得られる消費財の数量を増大させる効果をもつ。この利益が働き続ける労働者に限られることに注意しなければならない。第２表は、両国における貿易の利益を総括的に示すものであり、働きつづける労働者にとってそれは同一労働により購入できる財の数量が増大することを意味した。しかし、貿易開始の前後で両国の消費量が変わらないならば、第２表は同時に両国で必要とする労働量が減少する。これは、働ける労働者の数が減少すること、すなわち失業する労働者が出ることを意味する。失業した労働者は、貿易の利益を享受できない。また、比較優位を持たない産業では、生産量が減少するか 0 になる。この産業に従事する経営者ないし資本家も、貿易の利益を享受することはできない。新産業あるいは比較優位のある産業に転換できない資本家は、貿易の開始により廃業や倒産に追い込まれる可能性がある。これらの事情は貿易摩擦がなぜ、いかに起こるかを端的に説明している。

貿易摩擦は、唯一のストーリーではない。貿易の開始により、人々がより多くのものを消費するようになるかもしれない。貿易により浮いた労働力を新しい産業を育てることに使えるかもしれない。そうすれば、経済は全体として活動を拡大し、成長することができる。

以上がリカード貿易理論の骨格である。このような骨格は、どの程度の一般性をもつだろうか。リカードの貿易理論については、さまざまな限界が指摘されてきた。リカードの原型は、２国、２財で投入が労働に限られていた。これらの限界は、どの程度、拡大できるだろうか。

1.2 これまでの理論研究

理論を拡大するに当たってのポイントは二つある。ひとつは、２国２財という設定を廃して多数国多数財の場合を考察することである。もうひとつは、労働のみが投入されているというリカードの設定から中間財が投入される場合へ拡張することである。

労働のみが投入される場合の２国N財への拡張は、Harberler(1930) などで行われた。 Dornbusch, Fisher and Samuelson(1977) は、この分析を財の数が連続濃度存在する場合に拡張しているが、かえって現実から離れてしまう試みである。多数国２財への拡張は、Viner(1937) などによりなされているが、適切な問題設定とはいえない。

McKenzie(1954a) は、多数国多数財の場合に、世界生産が効率的でありうる条件を検討し、それが競争的価格を満足させることを示した。Jones(1961) は、多数国多数財の場合に、どの国がどの財に特化しうるかに関する簡潔な判定式を与えた。中間財が存在する場合にも、この判定式は、次の二つの場合には適用可能である。このうち［1］は Jones が「対称の場合」と呼んでいる場合である。

1. 労働投入係数は国によって異なるが、財の投入係数はすべての国において等

しい場合

2. 中間財が存在しても貿易されない場合

［1］の場合、中間財があっても、国別の原価の比較においては、中間財費用が相殺されてしまう。［2］の場合は、最終財に直接間接に投入される労働量が計算でき、中間財の投入を当該国の労働投入に換算できる。三邊信夫 (1971, Minabe 1995, 2001) は多くの論文・著書において McKensie と Jones の延長上に議論している。池間誠 (1993) は、多数国３財の場合に、どのような特化パタンが現れるかをグラフ上に図示する方法を示した。

商品による商品の生産が行われるという観点からは、 中間財が貿易される場合が重要であることはいうまでもない。中間財を貿易するかしないかで、世界全体の生産可能量は大きく変化する。このことは図**??**に示されている。Samuelson(2001) も、1817 年のリカードの貿易論に対して、スラッファの潜在的貿易理論は、生産可能集合を大きく拡大させると強調している。しかし、中間財を考慮した分析はきわめて少なく、一般的理論といえるものはない[2]。

[パワーポイント資料　図 2]

図 2: 中間財貿易のある場合とない場合の差異

McKenzie(1954b) は、国際貿易理論が一般均衡理論の枠組みで扱えることを示したものであるが、どのような貿易パタンが成立するかなどについて教えるところは少ない。現在までのところ、中間財の貿易を許す設定において、多数国多数財の場合を分析したものはほとんどないに等しい。たとえば、Deardorff(2005) は中間財が存在する場合の比較優位を概念化するため、いくつもの定義を提起しているが、決定的なものがどれであるか示せていないし、それらの定義においてなにが得られるかについても考察していない。東田啓作 (2004b) は、池間の図解法を中間財のある場合に拡張して、３国３財の場合に完全特化パタンが複数現われうることを示しているが、数少ない例外である。

[2]Sanyal and Jones(1982), Jones(2000) などをみよ。多段階的生産を前提としているが、輸入した中間財を用いて輸出財を生産することは仮定によって排除されている。 Jones and Neary(1984) §3.1.3 をもみよ。

数学的解析は、このように非常に限定的な場合にしかなされていない。しかし、それは比較優位の「考え」が現実の世界に成立することを否定する理由にはならない。Steven Suranovic(1997-2004) は、Web 上の著書の 40-0 節「比較優位の理論：概観」において、これまで数学的モデルとして得られた結果およびそこに前提される仮定がきわめて狭いことを認めた上で、リカード理論に懐疑的な人たちにたいし、この理論はモデルが前提としている状況より「もっと複雑な現実世界にも持ち越し可能な「洞察」(insight) を含んでいる」と警告している。

1.3 他の貿易理論

国際貿易理論には、リカード理論ないし比較生産費理論の他に、大別して二つの理論がある。要素比率理論 (ヘクシャー・オリーン・サミュエルソンの理論) と特殊要素理論である[3]。国際貿易に関する多くの教科書には、これら３つが並列されている。順序はかならずしも一定でないが、歴史的展開の順序を反映させて、リカード理論の後に、二つの理論が紹介されるのが普通である。このため、あたかもリカード理論が他の代替的な理論に置き換えられてきたような印象を学生たちに与えている。

要素比率理論は、標準的には各国が同じ技術をもつと想定し、各国の賦存生産要素の比率がちがうことから賃金率と資本利子の国際的な差異を説明する。これに対し、リカード理論は国によって技術が異なることを本質的な特徴としている。それは、各国の賃金率の差異をもたらす最重要な要因が技術の違いにあると考えている。

ひとつの国の内部でも賃金水準に差異はあるが、その違いは比較的小さい。国が違うとき、その差異は驚くほどおおきい。賃金率も一人当たりの所得も、20 世紀の一時期 70 倍以上も開いたことがある。これは国際経済を考えるとき、どうしても考慮に入れざるをえない事実である。なぜ、このような乖離が生じたか。これこそが国際貿易論の探求すべき最終目標であるといってもよい。この大きな賃金率の格差に対し、リカードの理論は技術を、ヘクシャー・オリーン・サミュエルソンの理論は要素比率を主要な原因と考えて貿易理論を構成している。代替的な理論のどちらがより正しく現実を説明するものであろうか。

詳しくは述べないが、クルーグマンとオブズフェルト (1999, p.106) も強調するように、要素比率理論には「経験的に強い反証が存在する」。これに対し、リカード理論は、Balassa(1961) の論文をはじめとするいくつもの検証において経験的な事実と整合するものであることが確認されてきている[4]。ただ、これまでリカード理論は、本質的には２国２財の場合にしか分析されてこなかった。それが一般均衡理論を背景とするヘクシャー・オリーン・サミュエルソンの理論をより高度なもの、より可能性のあるものと誤認させてきた。本論文のひとつ意義は、リカー

[3]特殊要素理論は、要素比率理論の変種とも考えられる。

[4]日本におけるこの方面の検証については、柳田義章 (2002) の「主要参考文献」をみよ。

ド理論のこうした限界が突破しうるものであることを示すことにある。

ヘクシャー・オリーン・サミュエルソンの理論には、理論的な観点からも問題がある。それは労働のほかに資本を生産要素としている。しかし、現実には資本という単一の生産要素が存在するわけではなく、じつは貿易可能な多数の財の集合である。それは価格理論に先立っては量的に存在しえないものである。この点で、ヘクシャー・オリーン・サミュエルソンの理論構成は、理論的な矛盾を内包している。

最近の展開として、収穫逓増の場合を定式化しようとする試みがある[5]。この試みは、新構成においても可能であるが、本論文の範囲を超えるものであり、触れない。なお、クルーグマンらは、比較生産費説では産業内貿易は説明できないとし、収穫逓増の効果を重視しているが、多数財で中間財が貿易される経済では、産業が (差別化できる) 複数の財の生産を包含するものである以上、リカード理論の新しい構成によっても、産業内貿易の存在は十分説明可能である[6]

1.4 本論文の結果

前出の Suranovic(1997-2004) は、モデルというものは、所詮、非常に制約的な状況でのみ成立するものであるとしているが、この主張は支持できない。リカード理論の現状は、それが基本的に正しい洞察であるにも関わらず、理論の未発達によって狭い範囲に閉じ込められてきたというべきであろう。事実、本論文は、従来仮定されてきた設定よりはるかに広い範囲で一般的な考察が可能であることを示している。本論文では、リカード貿易論の骨格が以下の場合に拡張できることが示されている：

1. 経済には M 個の国があり、N 種の財を生産し、貿易している。(M と N は任意の正の整数)
2. 生産には財の投入が必要であり、かつそれらの中間財が国際的に取引される。
3. 一つの財の生産には複数の技術が存在する。

基本的に正しいと思われるにも関わらず、理論が狭い範囲に限定されてきたのには理由があったに違いない。そのひとつは、リカード理論の近代的分析において採用された問題の立て方にあったと思われる。それは与えられた労働量において生産可能集合を検討するという構成をとっている。このため、一般論は展開できても、価格と数量の相互関係や不均衡状態の考察が困難なものになっていた。

---

[5] Krugman(1979), Helpman and Krugman (1985), Yang, Cheng, Shi, and Tombazos(2005) などがある。

[6] Davis(1995) は、かれのいう Heckscher-Ohlin-Ricardo モデルにより、産業内貿易の成立を説明している。

この論文では、リカード貿易理論を展開するに当たって、従来とはことなる構成法を採用している。この構成法においては、まず各国の賃金率を所与として、その状況において世界的に成立する価格を考察する。この理論の展開において核となるのが、最小価格定理である。これは古典派の直観の基底にあった洞察を現代的に再定式化したしたものである。この構成法は、価格と数量の分析を切り離すことを可能にし、「均衡状態」以外の状況の分析も可能にしている。この拡張に当たって重要な役割を果たすのは、分担的な特化パタンの存在を示す定理 (弱い定理と強い定理) である[7]。前者は公正配分という分野ですでに知られた定理の国際貿易への応用に過ぎないが、強い意味での分担的特化パタンの存在定理はわたしの知るかぎりこの論文で初めて示されるものである。

リカード貿易理論の新しい構成法は、理論的考察の範囲を「均衡」の枠から解放し、過渡的状態の分析をも可能にする。貿易摩擦がこのような過渡的状況の問題であることを考えると、新しい構成法は理論的な新展開にとどまらず、貿易政策を考えるにあたって重要な知見を与えてくれるものにもなるであろう。理論的にも、本論文は、リカード理論が単一の生産要素としての「資本」という価格理論以前には測定できない量を前提することなく、拡張できることを示している。政策上の含意については、本論文は、理論的な分析の系論として簡単に述べるにすぎないが、その射程はここに述べられたものにとどまらない。

2　基礎となる諸概念と定理

2.1　技術と生産、生産価格

世界には M 個の国があり、全部で N 種類の財が生産されているとする。すべての出発点となるのは技術の概念である。

定義 2.1 (技術)
ある経済において、労働と財の一定量を投入してある産出をえることが知られているとき、その知識をその経済における実現可能な技術という。技術は線型であると仮定する。すなわち、労働量 u と財のベクトル $\mathbf{d}$ とを投入して、財ベクトル $\mathbf{e}$ を得るとき、任意の正の実数 s に対し、$s\,(u, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ も生産可能である。ある経済において実現可能な技術の全体をその経済の技術集合という。

以下では、簡単のために、各生産において労働はかならず必要であるとする。

ひとつの技術は労働投入係数 u と財の投入係数ベクトル $\mathbf{d}$、産出係数ベクトル $\mathbf{e}$ とで与えられる。あるいは、まとめて $(-u, -\mathbf{d}, \mathbf{e})$ で表される。これを生産係数ベクトルという。労働と財の投入係数をまとめて $(u, \mathbf{d})$ を投入係数ベクトルと呼ぶこともある。産出係数ベクトルと財の投入係数ベクトルの差 $\mathbf{e} - \mathbf{d}$ を (財の) 純

[7] 塩沢由典 (1985) の時点で全体的構想はあったが、その続編というべき本論文が 20 年以上遅れることなったのは、この定理の証明に時間がかかったためである。

生産係数ベクトルという。労働投入をも考えて $(-u, \mathbf{e}-\mathbf{d})$ を労働投入を含む純生産係数ベクトルとよぶこともある。

生産係数ベクトルのあらわし方には、係数倍の不定性がある。各生産において労働はかならず正であると仮定したから、投入労働量 u がつねに 1 となるよう生産係数ベクトルをとることができる。これを労働による基準化という。多くの文献では生産係数ベクトルは産出量により基準化されているが、この論文では展開の都合上、労働による基準化をもちいる。労働で基準化された生産係数ベクトルはつねに $(-1, -\mathbf{d}, \mathbf{e})$ という形をとる。

技術がいくつもある場合には、一般に上付き添数を付けて区別する。たとえば、$(-1, -\mathbf{d}^{\tau}, \mathbf{e}^{\tau})$ などと書く。u の k 乗といった表現は現れないので、これで混乱はない。

技術 $(-1, -\mathbf{d}, \mathbf{e})$ による任意の生産は、s を任意の正の数として、労働投入 $x_0 = s$, 財の投入 $\mathbf{x}_+ = s\,\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_N)$、産出 $\mathbf{y} = s\,(e_1, e_2, \ldots, e_N)$ で表される。この s を生産規模という。規模 $t\,(-\mathbf{d}, \mathbf{e})$ による生産も可能である。これは各技術による生産の単純な和 (ベクトルとしての和) である。これより、各技術による生産規模を s_t とするとき、ベクトル $\sum_{t=1}^{L} s_t\,(-\mathbf{a}^t, -\mathbf{e}^t)$ は生産可能である。これは二つのベクトルを用いて、簡単に $(-\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と書くときもある。ここに $\mathbf{x}$ は投入ベクトルで、労働投入も含むN+1次の横ベクトルで $(x_0, \mathbf{x}_+)$、$\mathbf{y}$ は産出ベクトルで N 次の横ベクトルである。

以下では技術系の概念が重要となる。そのため、次の定義と仮定をおく。

定義 2.2 (単純生産の仮定)
ひとつの技術によって産出される財の種類は一種類とする。これを単純生産の仮定という。ある財を産出する生産活動の全体を産業という。たとえば、S 国の第 n 財産業といった表現を用いる。

単純生産の仮定は、以下のすべての構成の前提である。この仮定により、ひとつの技術により、苛性ソーダと塩素とが産出されるといった連産が排除される。耐久資本財をもちいる生産でも、一期古くなった固定資本財を副産品として産出させる扱いが必要となるが、耐久期間内での生産能率が一定という仮定をおける範囲 (平坦な経済) では、価格計算などを単純生産に帰着させることができる[8]。その扱いは国際貿易の場合でも同様であるが、この論文では明示的には扱わない。

単純生産の仮定のもとに、技術系の概念が定義される。

定義 2.3 (技術系)
技術系とは、各財ごとにそれを生産するひとつの生産技術を指定する仕方をいう。したがって、技術系 γ は、各財 n に対し、第 n 財を産出する技術 $\gamma(n) = (1, \mathbf{d}^n, \mathbf{e}^n)$ をひとつ指定する。

[8]塩沢由典、1983、第 30 節

労働によって基準化するとき、技術系 γ をひとつ指定するごとに、任意の財 k について、その財を産出する生産係数ベクトル $(1, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ がひとつ与えられる。ここに $\mathbf{e}$ は第 k 要素のみが正、その他の要素は 0 というベクトルである。この純生産ベクトル $\mathbf{a} = \mathbf{e} - \mathbf{d}$ を第 1 財を生産するものから第 N 財を産出するものまで順番に縦に並べてできる N 次正方行列を A とすれば、

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_N^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^N & a_2^N & \ldots & a_N^N \end{pmatrix}.$$

労働投入ベクトル $\mathbf{u}$ は、労働に関して基準化されているから

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

この縦ベクトルは、しばしば $\mathbf{1}_N$ と表記される。このとき、A を生産係数行列[9]、$\mathbf{1}_N$ を労働投入係数ベクトルとよぶ。

生産係数行列 A の要素 a_j^i は、以下の性質を満たす:

$$i \neq j \text{ に対し } a_i^j \leqq 0, \quad i = j \text{ に対し } a_i^j > 0.$$

生産係数行列のもつこの性質に示唆を受けて正方行列 $A = (a_i^j)$ に対し、次の定義をおく。

定義 2.4 (生産タイプの行列、生産的)
正方行列 $A = (a_i^j)$ について相異なる任意の i, j について不等式 $a_i^j \leqq 0$ を満たすとき、行列 A を**生産タイプの行列**という。

生産タイプの行列 A について、非負の横ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ があって $\mathbf{x}A > 0$ となるとき、行列 A は**生産的**であるという。

生産係数行列、生産タイプの行列、生産的行列と類似の用語がいくつも使われているが、ある行列が生産タイプの行列であることとその行列が生産的であることは、明確に区別しなければならない。生産係数行列 A では、その対角要素 a_i^i は正であるが、生産タイプの行列の定義には $a_i^i > 0$ を仮定しない。生産係数行列 A は生産タイプの行列であるが、生産タイプの行列がすべて $\mathbb{E} - C$ の形に表されるとは限らない。ただし、$\mathbb{E}$ は N 次の単位行列とする。

[9]多くの文献では行列 A は投入係数行列を意味している。この論文では、一貫して生産係数行列を表している。

生産係数行列 A に定義 2.4 を適用すると、行列 A が生産的であるということは、$\mathbf{x}\,A>0$ となる生産水準ベクトル $\mathbf{x}$ が存在することを意味する。このとき、すべての財が純生産される。

生産タイプの行列 A について次の定理が成り立つ。

定理 2.1 (非負逆転可能定理)
生産タイプの行列 A が生産的であるなら、行列 A の逆行列が存在してそのすべての要素は非負となる。

証明は、たとえば二階堂副包 (1961, p.67) ▪. 定理 1 を参照せよ。塩沢由典 (1981, p.54) の非負逆転定理と実質的には同値である。定理 2.1 から容易に次の系が従う。

系 2.2 (正値対角行列)
生産タイプの行列 A が生産的であるとき、行列 A の対角要素と逆行列 A^{-1} の対角要素は正である。

証明
$B=A^{-1}$ とおこう。定理 2.1 から B の任意の要素 b_i^j は非負。逆行列の定義から、$A\,B=\mathbb{E}$。これより、任意の n について

$$a_n^n\cdot b_n^n=1-\{a_1^n\cdot b_1^n+a_2^n\cdot b_n^2+\ldots+a_{n-1}^n\cdot b_n^{n-1}+a_n^{n+1}\cdot b_n^{n+1}+\ldots+a_{N}^n\cdot b_n^N\}$$

が成り立つ。右辺の｛　｝内は非負であるから、$a_n^n\cdot b_n^n>1$。ここで、b_n^n は非負。もし a_n^n が負ならば $a_n^n\cdot b_n^n$ も負。したがって、a_n^n、b_n^n ともに正でなければならない。**証明おわり**。

技術系 γ の生産係数行列が生産的であるとき、技術系 γ も生産的であるという。生産的な技術系 γ は、正の生産価格 $(w,p^1,p^2,\ldots,p^N)$ をもつことがいえる。その前に、価格についてもいちおう定義しておこう。

定義 2.5 (価格)
価格とは、財のベクトルの集合上に定義された実数値関数 p で、線型のものをいう。N 種類の財があるとき、財のベクトル空間は N 次元空間である。財のベクトルを $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ と横ベクトルで表現するとき、価格は N 次の縦ベクトル $\mathbf{p}=[p^1,p^2,\ldots,p^N]$ で表され、

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})=\langle\mathbf{x},\mathbf{p}\rangle=\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}=\sum_{k=1}^{N}x_k\,p^k$$

という等式が成立する。

上の 3 つの辺はすべて同等である。どの表現を用いてもよいはずであるが、見やすさを重視して、以下では多く第二辺の表現、すなわち $\langle\mathbf{x},\mathbf{p}\rangle$ を用いる。

さて、当該国の賃金率を w としよう。このとき、技術系 γ の生産価格が以下で定義される。

定義 2.6 (生産価格)
技術系 γ の任意の技術 $(u, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ に対し、等式

$$u\,w + \langle d, p \rangle = \langle e, p \rangle$$

を満たす価格 p を技術系 γ の生産価格という。労働で基準化した生産係数行列 A をもちいれば、この条件は方程式

$$A\,\mathbf{p} = w\,\mathbf{1}_N \tag{2}$$

を満たすことと同等である。これは価格 p で投入・産出を評価した純生産額が支払われた賃金に等しいことを意味する。生産係数行列 A が非負逆転可能であるとき、生産価格は次式により与えられる。

$$\mathbf{p} = w\,A^{-1}\,\mathbf{1}_N. \tag{3}$$

一つの財を生産する複数の技術が存在するとき、技術の選択の問題が生ずる。このとき、以下の定理が成立する。

定理 2.3 (最小価格定理)
技術集合 Ξ があたえられ、そのひとつの技術系が生産的であるとする。このとき、ある技術系 μ が存在して，その技術系に関する生産価格を $\mathbf{p}$ とするとき，Ξ の任意の技術 τ に対し，不等式

$$\langle \mathbf{a}^{\tau}, \mathbf{p} \rangle \leq w^{C(\tau)} \tag{4}$$

が成り立つ。ただし，$\mathbf{a}$ は技術 τ の生産係数ベクトル、$C(\tau)$ は技術 τ の所属する国の番号とする.

技術 τ が第 k 財を産出する第 j 国ものであるとき、生産係数ベクトルでなく，産出係数ベクトルを取って $\mathbf{e} = (0, \ldots, q, \ldots, 0)$ 、財の投入係数ベクトルを $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_N)$ とするとき、式 (4) は

$$q \cdot p^k \leq w + \langle \mathbf{d}, \mathbf{p} \rangle$$

と書くこともできる．これは，賃金率 w と生産価格を $\mathbf{p}$ においては，他の技術集合 Ξ の他の技術 τ に置き換えても，技術系 μ に属するものにくらべて費用が増えるだけであることを意味する.

技術系 γ を決めるごとにひとつの生産価格が式 2 により決まることをもちいて、技術系の生産価格どうしの比較の形にすることも可能である。すなわち，定理 2.3 は，次のように言い換えることができる.

命題 2.4 (最小価格定理・技術系どおしの比較)
技術集合 Ξ があたえられ、そのひとつの技術系が生産的であるとする。このとき、ある技術系 μ が存在して，その技術系に関する生産価格を $\mathbf{p}$ とするとき，Ξ の任意の技術系 η についてその生産価格を $\mathbf{p}(\eta)$ とするとき，不等式

$$\mathbf{p} \leq \mathbf{p}(\eta)$$

が成り立つ。

最小価格定理は、ときに代替定理あるいは非代替定理と呼ばれている。証明は、塩沢由典 (1981, pp.106-110) に与えられている。二階堂副包 (1961, pp.163-168) には、「Koopmans の代替定理」として紹介されている。経済に複数の国があり、それぞれの国で賃金率がちがう場合にも、最小価格定理は容易に拡張される。

2.2　複数国の場合

経済に複数の国が存在するとき、ふたつの違いに注意をする必要がある。

ひとつは賃金率の違いである。本項では各国は固定した賃金率をもつものとして、その上でどのような価格体系が可能となるか考察する。賃金は通常各国の通貨単位で契約されているが、賃金率だけでなく国際為替レートも一定であるとし、第 m 国は一つの国際通貨によって賃金率 w^m をもつとする。各国間の賃金率がどのような比率であるとき、国際分業が可能となるか。世界全体の需要構成が与えられたとき、相対比率はどのような関係になければばならないか。こうした問いは、この論文の主要な研究目標の一つであり、このあといくつか節を通して明らかになる。

もう一つの違いは、技術である。リカードの貿易理論の特徴のひとつは、国ごとに異なる技術をもつと考えるところにある。このことを一般的に考察するには、たとえ、同じ労働時間・投入係数・産出係数をもつものでも、国が異なれば、異なる技術と見なさないと統一的な扱いが難しい。そこで以下では、複数の国がある場合には、すべての技術は国ごとの標識がつけられているとし、標識が異なれば異なる技術として扱う。すべての国のすべての技術の和集合を世界全体の技術集合という。

本論文では、以下では標準的に次の状況が想定される。

1. 世界にはM個の国とN種類の財とがある。
2. すべての財は国際市場で取引される。
3. 各国はそれぞれ非負の賃金率 w^j をもつ。賃金率体系 $w = (w^1, w^2, \ldots, w^N)$ は非負で O でないとする。
4. 各国はそれぞれの財を単純生産する線型の技術をもつ。
5. どの技術においても、労働は必要とする。
6. 一つの国に同一の財を生産するひとつないし複数の技術がある。
7. 各国はすくなともひとつ生産的な技術の体系 (投入係数行列) をもつ。

単純生産の仮定を置きつづけるかぎり、任意の技術 τ は二つの標識をもつことになる。ひとつは技術 τ が属する産業すなわち技術 τ が純生産する財の番号 j 、もうひとつは技術 τ が属する国の番号 m である。この関係を関数 G および C によって

$$m = C(\tau), \quad j = G(\tau)$$

と書くことにする。この記号法は後にしばしば使われる。

世界における技術全体の集合を Ξ としよう。財の種類数を N、国の個数を M とする。技術集合 Ξ の任意の元 τ をひとつ取るとき、かならず財番号 $C(\tau)$ と国番号 $G(\tau)$ とが付随している。言い換えれば、G および C はそれぞれ Ξ から番号の集合 $\{1, \cdots, M\}$、$\{1, \cdots, N\}$ への関数を定めている。

最小価格定理を多数国の状況において考察するために、以下の表記法を用いる。まず、国ごとに非負の賃金率 w^m が与えられているとして、それらを縦に並べて得られる M 次の縦ベクトル $\mathbf{w}$ を賃金率体系あるいは賃金率ベクトルという。もし技術系 γ が生産的であれば、この技術系に関する生産価格 $\mathbf{p}$ は次の等式で定義される。

$$A(\gamma)\,\mathbf{p} = I(\gamma)\,\mathbf{w}. \tag{5}$$

ただし、$I(\gamma)$ は第 j 財産出する技術 $\gamma(j)$ が第 k 国に属するとき、第 (j,k) 要素を 1、その他の要素を 0 とする N 行 M 列の行列、$A(\gamma)$ は $\gamma(j)$ の第 k 財投入係数を第 (j,k) 要素とする N 行 N 列の行列とする。これより、生産的な技術系 γ の付随する生産価格 $\mathbf{p}(\gamma)$ は次のように与えられる。

$$\mathbf{p} = A(\gamma)^{-1}\,I(\gamma)\,\mathbf{w}. \tag{6}$$

関係する技術系が γ であることが明瞭である場合には、I や A の表記から γ を省略してもよい。

複数国の場合にも、最小価格定理は容易に拡張できる。定理 2.3 の証明においては、賃金率 w はすべての労働投入に対し一定と仮定され、相対価格の計算にはなんの役割も果たさなかった。しかし、国際通貨単位で計った労働費用に注目すれば、複数国の場合であっても本質的な差異はない。一国の場合の生産価格の定義式における $w \cdot \mathbf{1}_N$ の代わりに $I(\gamma)\,\mathbf{w}$ に置きなおされるにすぎない。そこで、多数国の状況においても、定理の系として、以下の定理が成立する。この定理が国際価値論のすべての議論の基礎となる。

定理 2.5 (複数国での最小価格定理)
技術集合 Ξ は、単純生産の仮定を満たし、そこにおいてはどの生産にも正の労働が必要とし、全世界で少なくともひとつの生産的な技術系が存在するとする。このとき、非負の賃金率体系 $\mathbf{w} = [w^1, w^2, \ldots, w^M]$ をひとつとるとき、Ξ のある生産的な技術系 μ が存在し、対応する生産価格

$$\mathbf{p}(\mathbf{w}) = A(\mu)^{-1} I(\mu)\mathbf{w} \tag{7}$$

は、技術集合 Ξ の任意の技術 τ について以下の不等式を満たす：

$$\langle \mathbf{a}^\tau, \mathbf{p} \rangle \leq w^{C(\tau)}. \tag{8}$$

ただし、$\mathbf{a}^\tau$ は技術 τ の規準化された生産係数ベクトル、$G(\tau)$ および $C(\tau)$ は、それぞれ技術 τ の属する産業および国とする。

賃金率体系 $\mathbf{w} = [w^1, w^2, \ldots, w^M]$ のありようによっては最小価格 $\mathbf{p}$ が $\mathbf{0}$ となることがあることに注意する。この定理は、命題 2.4 と同じように、二つの技術系に関する生産価格を比較する形に書くこともできる。

命題 2.6 (複数国・技術系どおしの比較)
技術集合 Ξ があたえられ、そのひとつの技術系が生産的であるとする。このとき、ある技術系 μ が存在して，その技術系に関する生産価格を $\mathbf{p}$ とするとき，Ξ の任意の技術系 η についてその生産価格を $\mathbf{p}(\eta)$ とするとき，不等式

$$\mathbf{p} \leq \mathbf{p}(\eta)$$

が成り立つ。

定理 2.5 から、任意に与えられた賃金率体系 $\mathbf{w}$ において国際的な生産価格 $\mathbf{p}$ がひとつ一義的に定まる。この生産価格 $\mathbf{p}$ は式（7）で与えられるが、それが同時に式（8）を満たすことが重要である。言い換えれば、技術集合 Ξ の任意の技術に対し式（7）が弱い不等式 (等式あるいは不等式) として成り立つが、そのうち技術が技術系 μ に属するものについては、式（8）がとくに等式で成立する。これは第 3 節の考察の出発点となる。

式（8）を等式で満たす技術は技術系 μ に属するものとは限らない。式（8）を等式で満たす生産技術 τ は賃金率・価格体系 $(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ において競争的であるという。しかし、競争的な技術がどの国に存在するかについては、この定理からはなにもいえない。競争的な技術が一つの国に集中し、他の国には競争的な技術がひとつもないかもしれない。このようなとき、賃金率・価格体系 $(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ においては国際貿易は成立しない。どの国も国際貿易に参加するためには、ひとつの国にはすくなくとも一つの財の生産技術が競争的でなければならない。賃金率 $\mathbf{w}$ が特定のものであるとき、このような状況が成立することが第 3 節で示される。

技術系に注目する分析は便利なものであるが、後の考察ではもうすこし別の観点が必要となる。そのため、行列 A および行列 I について、新しい記号法を導入する。経済には N 種類の財があり、すべてで K 個の技術があるとする。技術集合 Ξ の元に番号をつけて、第 k 番目の技術を $(-1, \mathbf{a}^k)$ と書くとする。このとき、N 次の横ベクトル $\mathbf{a}^k$ を K 個縦に並べてできる行列を $A(\Xi)$ と書き、技術集合 Ξ の行列表現あるいは技術集合 Ξ を表現する生産係数行列という。混同のおそれがないときは、$A(\Xi)$ を単に A と書くこともある。さらに、M 次の横ベクトルで、$C(\tau)$ のみが 1、他は 0 からなるベクトルを縦に並べてできる K 行 M 列行列を $I(\Xi)$ と

する。この定義により、方程式 (8) は以下の式 (9) が成立するということに等しい。ただ、式 (9) を満たす $\mathbf{w}$ および $\mathbf{p}$ というだけでは、式 (7) が成立するとき限らない。しかし、正の賃金率体系 $\mathbf{w}$ に対しては次の命題が成立する。

定理 2.7 (価格不等式の極大元)
技術集合 Ξ には、世界で少なくともひとつの生産的な技術系が存在するとする。技術集合 Ξ は、さらに単純生産の仮定を満たし、どの生産にも正の労働が必要とする。このとき、正の賃金率体系 $\mathbf{w} = [w^1, w^2, \cdots, w^M]$ に対し

$$A(\Xi)\ \mathbf{p} \leq I(\Xi)\ \mathbf{w} \tag{9}$$

を満たす非負ベクトル $\mathbf{p}$ の集合は空でなく、半順序 $\leq$ について極大のもの $\mathbf{p}_*$ がただひとつ存在する。このとき、ある技術系 γ が存在して

$$\mathbf{p}_* = A(\gamma)^{-1} I(\gamma)\mathbf{w}$$

を満たす。

証明
技術集合 Ξ には生産的な技術集合がすくなくともひとつ存在するから、それを μ としよう。不等式 (9) において技術系 μ に関係する行だけを取り出せば、

$$\mathbf{p}A(\mu)\ \leq\ I(\mu)\mathbf{w}$$

が成立する。μ に対応する生産係数行列 $A(\mu)$ は非負逆転可能だから、この不等式に右から $A(\mu)^{-1}$ を作用させると、

$$\mathbf{p} \leq A(\mu)^{-1}\ I(\mu)\mathbf{w}$$

が成立する。したがって、不等式 (9) を満たすベクトル $\mathbf{p}$ の集合は半順序 $\leq$ について上に有界かつ閉集合だから、極大元をひとつもつ。それを $\mathbf{p}_*$ としよう。さて、財番号 j を任意に取り、財 j を純生産するすべての技術 τ について、

$$\langle \mathbf{a}^\tau, \mathbf{p}_* \rangle < \mathbf{w}^{C(\tau)}. \tag{10}$$

が成立したとしよう。このとき、価格体系 $\mathbf{p}_*(\varepsilon)$ を $p_*(\varepsilon)^j = p_*^j + \varepsilon$ かつ $i \neq j$ のとき $p_*(\varepsilon)^i = p_*^i$ とおいてみよう。ただし、正の数 ε は、財 j を純生産するすべての技術 τ について

$$\langle a^\tau, \mathbf{p}_* \rangle + a_j^\tau\ \varepsilon < \mathbf{w}^{C(\tau)}$$

となるよう十分小さくとる。生産係数の性質から、もし $G(\tau) \neq i$ ならば $a_i^\tau < 0$ から、技術集合 τ の任意の技術 τ について、

$$\langle \mathbf{a}^\tau, \mathbf{p}_*(\varepsilon) \rangle \leq \langle \mathbf{a}_j^\tau\ \ p_*^j \rangle + a_j^\tau\ \varepsilon \leq \mathbf{w}^{C(\tau)}$$

が成立する。これより、ベクトル $\mathbf{p}_*(\varepsilon)$ は不等式 (9) を満たし、明らかに $\mathbf{p}_*(\varepsilon)$ より大きい。これは $\mathbf{p}_*(\varepsilon)$ が極大元であることに矛盾する。この矛盾は、財 j を生産するすべての技術について、式 (10) が成立すると仮定したことから起こった。したがって、j 財を純生産する技術 $\gamma(j)$ で式 (10) を等式で満たすものがすくなくともひとつ存在する。このことは、任意の j について成り立ちつから、それぞれに $\gamma(j)$ を指定すると技術系 γ が得られる。この技術系に対応する生産係数行列を $A(\gamma)$ および $I(\gamma)$ とすると、式

$$\mathbf{p}_* = A(\gamma)^{-1} I(\gamma)\mathbf{w}$$

が成立する。定理 (2.5) から $\mathbf{p}_*$ は不等式 (9) を満たし、かつある技術系の生産価格となっている。これは $\mathbf{p}_*$ が技術集合 Ξ の最小価格であることを意味する。このような価格はただひとつしかない。これが証明すべきことであった。**証明終わり**

3　分担的な国際分業体系の存在定理

この節では、各国が少なくともひとつの財の生産を分担できるような賃金体系が存在するかどうかを検討する。

分担的特化パタンの存在は、それが弱い意味であるか、強い意味であるによって異なる意義をもつ。弱い分担的パタンの存在は、**??**節の状況を満たす任意の国際生産体系において成立する。これに対し、強い分担的パタンの存在は、一般的ではあるが、ある条件を満たす場合についてのみ成立する。この意味で、弱い意味での分担的特化パタンの存在定理と強い意味での分担的特化パタンの存在定理とは、それぞれ独立の定理であり、一方から他方を導くことはできない。

3.1　弱い分担的特化パタンの存在

定理 3.1 (弱い存在定理)
各国がそれぞれ生産的な投入係数行列 $A(\Xi)$ をもつとき、ある正の賃金率ベクトル $\mathbf{w}$ において、弱い意味で分担的な特化パタンをもつ。

この定理の意味は次の通りである。正の賃金率ベクトル $\mathbf{w}$ をうまくとるとき、各国 n に少なくともひとつの産業 $G(n)$ が存在して、n 国の産業 $G(n)$ に属する技術 $\gamma(n)$ があり、これらの技術から作られる技術系 γ が $\mathbf{w}$ に付随する世界最小価格 $\mathbf{p}(\mathbf{w})$ を与える。この定理は、N と M の大小に関係なく成立する。

この定理の証明は、幾通りも考えられる。既存の結果の応用であるので、証明は概略を示す。

証明 1 (組み合わせ幾何)
国際分業体系の存在定理の内容は、*Su (1999)* の *Rental Harmony Theorem* の 3 つの条件を満たす。したがって、$w^j > 0$ かつ $w^1 + w^2 + ... + w^N = 1$ で各国が少なく

ともひとの産業に比較優位をもつ $w = (w^1, w^2, \ldots, w^N)$ が少なくともひとつ存在する。

証明 2 (細胞分割の弱い付値)
以下の強い定理の証明を修正して、競争関係による Δ の細胞分割 $\mathcal{D}$ において、弱い付値 wSP を考える。$\mathcal{D}$ の任意の元 $P(P \in D)$ に対し、$wSP(P)$ に現れる国記号を集合として集めたものを $wM_w(P)$ とする。P は少なくともひとつの国記号を含むから、空ではない。このとき、Δ のいかなる P についても $M_w(P)$ が国記号の集合 $M = \{A, B, \ldots, K\}$ の厳密な部分集合とすると、強い定理において構成したと同じように Δ から $\Delta - \{O\}$ への連続写像が存在することになり矛盾。よって、$\mathcal{D}$ のある元 P において各国は少なくともひとつの財について弱い意味で競争的となる。

証明 3 (生産可能集合の幾何)
各国は、正の労働力が与えられているとしよう。$\mathbf{q}$ を各国の労働力量を M 個横に並べたベクトルとする。命題 4.7 から生産可能集合 $\mathcal{P}$ には、非負の任意方向に極大元 $\mathbf{y}$ が存在する。そのとき、定理 4.3 より、M 次および N 次の正の縦ベクトル $\mathbf{w}$ および $\mathbf{p}$ が存在して、定理 4.3 の記号法で

$$A\mathbf{p} \leq I\mathbf{w} \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle$$

を満たすものが存在する。これは $\mathbf{p}$ が賃金率体系 $\mathbf{w}$ の上の世界最小価格であることを意味する。また、極大元では各国はすべての労働力を使っていなければならないから、系 **??** より、少なくともひとつ競争的な技術をもつ。したがって、弱い存在定理が成立するような賃金率体系 $\mathbf{w}$ が存在する。

このように弱い定理の証明はいろいろな方法により証明される。定理 (弱い存在定理) は、等号を含む競争関係についての主張である。しかし、一般には、不等式関係によって定義される強い競争関係について「強い定理」が一般に成立する。その定式と証明のためにすこし準備が必要である。

3.2 競争状態に関する諸定義

技術集合 Ξ には、世界で少なくともひとつの生産的な技術系が存在するとする。技術集合 Ξ は、さらに単純生産の仮定を満たし、どの生産にも正の労働が必要とする。このとき、賃金率が適当ならば、各国がどれかの財の生産において競争的となっているかどうかが問題となる。すべての国が生産に競争的に参加できる状態は、文献ではしばしば完全特化 complete specialization および不完全特化 incomplete specialization と呼ばれてきたが、以下の議論では完全特化および不完全特化の場合と、このどちらでもない場合とを区別する必要がある。後者の場合を非不完全特化ないし不不完全特化などと呼ぶのは見苦しいので、本論文では完全特化およ

び不完全特化の状況をあわせて、「分担的」shared pattern of speciaization と呼ぶことにする。

この概念をきちんと定義するため、および後の議論のために、以下の一連の定義をおく。

定義 3.1 (競争的・非競争的)
賃金率体系 $\mathbf{w}$ を一つ決めると、定理 2.5 より、所与の技術集合 Ξ における世界最小価格 $\mathbf{p}$ がひとつ定まる。このとき、技術集合 Ξ の任意の技術 τ について、

$$\langle \mathbf{a}^{\tau}\ ,\ \mathbf{p} \rangle \leq w^{C(\tau)} \tag{11}$$

が成立する。技術 τ が不等式 (11) を等号で満たすとき、技術 τ は賃金率・価格体系 $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ において**競争的**であるという。反対に、厳密な不等号が成り立つとき、技術 τ は賃金率・価格体系 $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ において**非競争的**であるという。

賃金率体系をひとつ与えると、最小価格体系はただひとつ定まる。また、後に証明される命題 3.2 によれば、分担的な賃金率と価格に限定するかぎり、この対応関係は一対一である。したがって、技術 τ は賃金率・価格体系 $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ において競争的あるいは非競争的という代わりに、技術 τ は、賃金体系 $\mathbf{w}$ に関し、あるいは分担的なものに限るかぎり価格体系 $\mathbf{p}$ に関し、競争的である・非競争的であるということができる。

相互に比例的な賃金率体系は、実質的には同じものと考えられる。そこで複数の賃金率体系について一括して検討したり、相互に比較したりするには、体系の表示の選び方を規準化しておくのがよい。ひとつの方法は、空間の正象限における標準単体 Δ を取ることである。賃金率空間については、それは

$$\Delta = \{(w^1, w^2, , w^N) \,|\, w^1 + w^2 + \cdots + w^N = 1,\, w^1 \geq 0,\, w^2 \geq 0, \ldots, w^N \geq 0\}$$

と定義される。標準単体は、価格空間や財空間についても考えるときがある。その場合、それぞれを簡略に**賃金率 Δ**、**価格 Δ** などと呼び、Δ_w および Δ_p などと書く。財空間の標準単体は、財 Δ と呼ぶかわりに、**生産面 Δ** と呼ぶ。

定義 3.2 (競争モードとモード分割)
賃金率 Δ の任意の点の上で、すべての技術は競争的なものと非競争的なものに分けられる。技術集合 Ξ から賃金体系 $\mathbf{w}$ に関し競争的な技術のみを集めた集合 $\mathrm{CM}(\mathbf{w})$ をこの点の**競争モード**という。賃金率 Δ は、おなじ競争モードをもつ相互に排他的な部分集合の和に分割される。それを賃金率 Δ のモード分割という。

この分割の特徴付けは、3.3 項で示される。

$\mathbf{0}$ でない任意の賃金体系 $\mathbf{w}$ において、最小価格 $\mathbf{p}$ を生産価格とする技術系が少なくともひとつある。それを γ とするとき、γ の任意の技術 τ は賃金体系 $\mathbf{w}$ に関し競争的である。したがって、賃金率 Δ の各点に対応する競争モードは空ではありえない。

いま、賃金率体系 $\mathbf{w}$ において、技術 τ が S 国の n 財を産出する競争的技術であり、他の国の n 財を産出するいかなる技術 σ も競争的でないとき、賃金率体系 $\mathbf{w}$ において技術 τ は (n 財について) **強い意味で競争的**であるという。競争的という概念が個々の技術について定義されているのに対し、強い意味で競争的という概念は、他国の技術との比較において定義されていることに注意する。定義から複数の国が同一の財について強い意味で競争的となることはない。

ある国がある財を競争的に生産できるかどうかは、その財を生産する競争的な技術が存在するかどうかに依存する。これも競争状態に関するひとつのモードであるが、技術に関するものと国に関するものとは区別する方が混乱がすくない。以下では、技術に関する競争状態をモード、国に関する競争状態をパタンと呼び、区別する。特化パタンは、国の水準でとらえた競争状態のひとつである。

定義 3.3 (特化パタン)
賃金率体系 $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ の競争モードを $\mathrm{CM}(\mathbf{w})$ とする。このとき、

$$\mathrm{wPS}(\mathbf{w}) = \{m \in \{1, 2, \cdots, K\} \mid m = C(\tau), \tau \in \mathrm{CM}(\mathbf{w})\}$$

を賃金率・価格体系 $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ における**弱い意味での特化パタン**という。賃金体系・価格体系 $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ の強い意味で競争的な技術の集合を $SM(\mathbf{w})$ とするとき、

$$\mathrm{sPS}(\mathbf{w}) = \{m \in \{1, 2, \cdots, K\} \mid m = C(\tau), \tau \in SM(\mathbf{w})\}$$

を**強い意味での特化パタン**という。強い意味での特化パタンは、$\mathbf{w}$ によっては空集合かもしれない。

定義 3.4 (分担的な特化パタン)
賃金率体系 $\mathbf{w}$ において、弱い意味での特化パタンがすべての国記号を含むとき、賃金率体系 $\mathbf{w}$ は分担的であるという。価格体系 $\mathbf{p}$ が分担的であるとは、それがある賃金率体系 $\mathbf{w}$ に対応する最小価格体系であって、賃金率体系 $\mathbf{w}$ が分担的であることをいう。強い意味での特化パタンがすべての国記号を含むとき、賃金率体系は強い意味で分担的であるという。

強い意味で分担的であるとき、任意の国は少なくもひとつ強い意味で競争的な技術 (財を生産する産業) をもつ。したがって、$M > N$ の場合には、いかなる賃金体系も、強い意味で分担的となることはありえない。

定理 2.7 により、不等式 (9) を満たすベクトル $\mathbf{p}$ は無数にしうるが、極大なものが唯一存在し、それが賃金率体系 $\mathbf{w}$ に対応する世界最小価格を与えることを意味している。この逆が部分的になりたつ。非負の価格体系 $\mathbf{p}$ をひとつ与えたとよう。ある賃金率体系 $\mathbf{w}$ に対し、価格 $\mathbf{p}$) が不等式 (9) の極大元となるとする。このような賃金率体系 $\mathbf{w}$ は一義的に決まるであろうか。賃金率デルタ全体ではこのような賃金率体系 $\mathbf{w}$ は一義ではないが、それらを分担的なものに限ったときには、賃金率体系と価格体系の間に一対一の関係が存在する。

命題 3.2 (賃金率と価格の対応)
賃金率体系と価格体系を分担的なものに限ったとき、賃金率体系と対応の最小価格体系との間には一対一の関係が成立する。

証明
賃金率体系 $\mathbf{w}$ に唯一の世界最小価格 $\mathbf{p}$ が存在することは、定理 *2.5* から明らかである。逆に、非負の価格 $\mathbf{p}$ が与えられたとき、ある賃金率体系 $\mathbf{w}$ について、ベクトル p が不等式 (9) を満たす極大元となっているとしよう。定理 *2.7* からある技術系 γ が存在して

$$A(\gamma)\ \mathbf{p} = I(\gamma)\ \mathbf{w}$$

が成立する。このような賃金率体系 $\mathbf{w}$ が存在し、かつ賃金率体系 $\mathbf{w}$ と価格体系 $\mathbf{p}$ について分担的な特化パタンが求まるとしよう。このとき、γ はすべての国の技術を含むから $I(\gamma)\mathbf{w}$ はベクトル $\mathbf{w}$ の各要素をすくなくともひとつ含んでいる。いま、w^j が $I(\gamma)\mathbf{w}$ の第 k 要素として現れているとすれば、それは $A(\gamma)\mathbf{p}$ の第 k 要素に等しい。したがって、ベクトル $\mathbf{w}$ のすべての要素は価格 $\mathbf{p}$ により一義的に定められている。**証明終わり**

以上の準備のもとに、次節 3 では分担的な特化パタンが存在するかしないのかを検討する。
定理 2.7 および命題 3.2 は、第 4 節において有効に利用される。

3.3 賃金率 Δ のモード分割

Δ を規準化された賃金率体系の集合つまり賃金率空間の標準単体とする。各国の賃金率は非負でその総和が 1 となるよう規準化されている。
以下では財の種類数 N が国の数 M より大きいか等しい場合を想定する。各国は多数の技術をもつが、それらはすべて単純であるとする。技術は国が異なればことなる技術とし、すべての国の技術の集合を Ξ とする。任意の財につき、ひとつの技術を割り振る写像を技術系 γ 、対応の生産係数行列を $A(\gamma)$ とする。ここで、生産は労働投入を単位とするよう規準化されている。

技術系に付随する凸多面体

技術系 γ に対応る生産価格 $p(\gamma)$ は、式 (6) で与えられる。
もし技術系 γ が賃金率体系 $\mathbf{w}$ において世界最小価格 $\mathbf{p}(\mathbf{w})$ を与えるものであるなら、技術集合 Ξ の任意の技術を τ 、その生産係数ベクトルを $(-1, \mathbf{a}^\tau)$ とするとき、不等式

$$\langle \mathbf{a}^\tau\ ,\ \mathbf{p}(\mathbf{w})\rangle \le w^{C(\tau)} \tag{12}$$

がなりたつ。ここで $C(\tau)$ は第 2.1 項で定義した技術の所属する国を表す関数とする。さらに $\mathbf{w}$ が Δ の元であるためには、関係

$$w^1 + w^2 + \ldots + w^M = 1,\ w^1 \geq 0, w^2 \geq 0,\ \ldots, w^M \geq 0 \tag{13}$$

を満たしていなければならない。

そこで技術系 γ を任意にひとつ固定するごとに、未知数 $w^1, w^2, \ldots, w^M$ に付いて (等式と不等式からなる) 一連の不等式体系：等式（5）と不等式（12）および条件（13）が付随していると考えることができる。この不等式体系は解をもつとき限らないが (じっさい多くの場合、解をもたない)、解をもつ場合には、その集合は賃金率空間の標準単体 Δ の凸多面体を定義している。

多面体とは、多次元の実数空間 $\mathbb{R}^N$ の有限個の点から生成される凸集合をいう。多面体論のもっとも基本的な定理は、任意の多面体は連立一次不等式の解として表され、連立一次不等式の解で有界なものは多面体であるという定理である[10]。これを多面体論の主定理という。多面体論として必要なものは、この論文では、この事実と後の補助定理 3.4 のみである。解が存在しない場合、γ は Δ の空集合を定義していると考えれば、すべての技術系は Δ のある凸多面体 P を定義している[11]。

凸多面体による賃金率 Δ の細胞分割

定理 2.5 から、賃金率空間の標準単体 Δ の任意の点は、ある特化パタンに付随する集合となる。これより、Δ の細胞分割が得られる。そのことを述べる前に、まず、細胞分割の概念を定義しておこう。

定義 3.5 (細胞分割)
凸多面体 Δ の**細胞分割**とは、Δ の一部からなる多面体の集合 $\mathcal{D}$ のことで、以下の 5 つの条件を満たすものをいう。

1. 空集合は $\mathcal{D}$ の元である。
2. 多面体 P が集合 $\mathcal{D}$ の元であるとき、P のすべての面はまた $\mathcal{D}$ の元である。
3. 二つの多面体 P と Q とが $\mathcal{D}$ の元であるとき、二つの共通部分 $P \cap Q$ はまた $\mathcal{D}$ の元である。
4. Δ のすべての点は、$\mathcal{D}$ のある元の元である。
5. Δ 自身は $\mathcal{D}$ の元ではない。

[10] G.M. ツィーグラー (2003, p.80) §1.1 「主定理」
[11] 空集合は定義として -1 次の凸集合と考える。

細胞分割はときに複体分割とも呼ばれるが、本論文では分かりやすく細胞分割と呼んでおく。

有限の技術集合 Ξ が一つ与えらたとしよう。技術集合 Ξ は、少なくともひとつ、生産的な技術系を持つものとする。そのとき、技術集合 Ξ に付随する Δ の細胞分割が以下のように構成される。技術集合 Ξ の任意の技術系 γ をひとつ取って、未知数 $w^1, w^2, \ldots, w^M$ に関する一連の不等式体系：等式（5）と不等式（12）および条件（13）を考えよう。これには、解をもつときともたないときがある。解をもつときには、解の集合はある多面体 P である。解をもたないときは、空集合 Φ を-1次元の凸集合と考えることにする。こうすれば、任意の技術集合 Ξ の任意の技術系 γ について、Δ の部分集合である多面体がひとつ対応している。

さらに技術集合 Ξ の部分集合で少なくとも一つの技術系を含むものをとって同じような等式・不等式系を考えよう。このような集合を増補された技術系あるいは増補技術系という。増補された技術系 σ に関し、その生産価格を以下のように定義する。

定義 3.6 (増補技術系に関する生産価格)
技術の集合 σ であって、各財を純生産する技術を少なくともひとつ含むものを増補された技術系という。非負の価格体系 $\mathbf{p}$ であって、ある非負で $\mathbf{0}$ でない賃金率体系 $\mathbf{w}$ ともに、σ に属するすべての技術 τ について等式

$$\langle \mathbf{a}^{\tau}, \mathbf{p} \rangle = \mathbf{w}^{C(\tau)}. \tag{14}$$

を満たすとき、ベクトル $\mathbf{p}$ を賃金率体系 $\mathbf{w}$ の上の**増補技術系 σ に関する生産価格**という。

このような生産価格はいかなる非負の賃金率体系 $\mathbf{w}$ を取ろうと存在しない場合がある。その場合、増補技術系 σ に付随する多面体は空集合であると考える。技術系の代わりに増補された技術系をとっても、その解の集合は、制約が多くなるだけ (満たすべき等号の数が増えるだけ) であるから、もし Δ の元に解があるならそれらの集合は凸多面体である。

定義 3.7 (増補技術系が定義する多面体)
増補技術系 σ について、

$$A\mathbf{p} \leq I\mathbf{w},\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{w} \in \Delta$$

が解 $\mathbf{w},\ \mathbf{p}$ をもつような Δ の元 $\mathbf{w}$ の集合を増補技術系 σ の定義する Δ の多面体という。

集合 $\mathcal{D}$ を賃金率 Δ の部分集合の集合で、その元は空集合であるか、あるいは技術集合 Ξ のある増補された技術系が定義する Δ の多面体からなる全体とする。これを**増補技術系が定義する賃金率 Δ の分割**という。このとき、次の定理が成立する。

定理 3.3 (細胞分割)
どの国も少なくともひとつ生産的な技術系をもつような技術集合 Ξ があたえられたとしよう。技術集合 Ξ は単純生産の仮定を満たし、労働投入はつねに必要とする。このとき、増補技術系が定義する賃金率 Δ の分割 $\mathcal{D}$ は Δ の細胞分割となっている。

証明
細胞分割の定義の各項を確認しょう。

1. 空集合は $\mathcal{D}$ の元である。これは定義より明らか。

2. 多面体 P が集合 $\mathcal{D}$ の元であるとき、P のすべての面はまた $\mathcal{D}$ の元である。ある増補された技術系 σ が Δ の多面体多面体 P を定義しているとしよう。この多面体の面 P' は、増補された技術系 σ に関する等式 (??) に更にいくつかの等式を加えたものである。それらは、ある技術 τ に関する等式だから、増補された技術系 σ をさらに増補した技術系 σ' を取れば、多面体面 P' は増補した技術系 σ' の定義する多面体となっている。したがって、集合 $\mathcal{D}$ の元の P のすべての面はまた $\mathcal{D}$ の元である。

3. 二つの多面体 P と Q とが $\mathcal{D}$ の元であるとき、二つの共通部分 $P \cap Q$ はまた $\mathcal{D}$ の元である。二つの多面体 P と Q を与える技術の集合をとり、その和集合を作ろう。それに付随する解の集合は共通部分 $P \cap Q$ を与える。

4. Δ のすべての点は、$\mathcal{D}$ のある元の元である。定理 2.5 から、賃金率 Δ の任意の点 x は、ある増補された技術系の定義する多面体となる。したがって、Δ のすべての点は、$\mathcal{D}$ のある元の元である。

5. Δ 自身は $\mathcal{D}$ の元ではない。
各国がすくなくともひとつ生産的な技術集合をもつ。したがって、各 j につき、他の w^k が正で、w^j が十分 *0* に近いとき、賃金率体系 $\mathbf{w}$ に対応して最小価格を与える技術系は j 国の技術のみからなる系である。したがって、集合 $\mathcal{D}$ は少なくとも M 個の元を含み、集合 $\mathcal{D}$ のどの元をとっても、賃金率 Δ 全体を被覆することはない。

これにより増補技術系が定義する賃金率 Δ の分割 $\mathcal{D}$ が Δ の細胞分割であることがいえる。**証明おわり**

以下は、ある技術集合に対応する賃金率 Δ の細胞分割である。

［パワーポイント資料：第 3 図　賃金率 Δ のモード分割］

図 3: 賃金率 Δ のモード分割

細胞分割とモード

3.2 項で、賃金率 Δ の各点に対して、競争モードが定義されること、したがって Δ はおなじ競争モードをもつ相互に排他的な集合の和に分割されることをみた。定理 3.5 で与えられる細胞分割は、じつはこのモード分割にほかならないことを以下に示す。そのため、まず次の補助定理に注意する。

補助定理 3.4 (多面体の表現定理)
M 次の実数空間 $\mathbb{R}^M$ の 1 次元以上の任意の多面体 P は、ある等式の系 S_E の解集合として表現されるアッフィン空間 (線形空間を平行移動したもの)E の点で、各ファセット[12]*ごとにそれを定義する弱い不等式を満たす点の全体として表される。したがって、任意の多面体はいくつかの等式と (空かもしれない) 弱い不等式とからなる系の解として表現される。*

証明
G.M. ツィーグラー (2003, *p*.80) 定理 2.15 の (7) をみよ。

補助定理 3.4 より、賃金率 Δ の細胞分割を構成する多面体 P は、Δ の点であっていくつかの等式を満たし、さらにファセットの数だけの弱い不等式を満たす集合として表現される。このとき、弱い不等式を強い不等式に置き換えて得られる等式・不等式系の解を**多面体 P の相対内点**という。次元が 1 以上の多面体はかならず相対内点をもつ。また、上の等式・不等式系については、それぞれがある技術に関する等式・不等式に当たるものとしてかまわない。

賃金率 Δ の細胞分割 $\mathcal{D}$ の元である任意の多面体 P について、その相対内点の集合を $\mathrm{int}(P)$ と書くことにしよう。これを**相対内部**という。このとき、$\mathrm{int}(P)$ の各点の上で不等式 (12) を考えると、そこから得られる競争モードは、どの点でも同

[12] 多面体のファセットとは、多面体の境界をなす面のうち、最大次元をもつものをいう。言い換えれば、N 次元空間において内部をもつ多面体のファセットとは $N-1$ 次元の境界面をいう。

じとなる。このことから細胞分割 $\mathcal{D}$ の元である任意の多面体 P について競争モードを定義することができる。

定義 3.8 (多面体 P の競争モード)
集合 $\mathcal{D}$ を増補技術系の定義する賃金率 Δ の分割とする。集合 $\mathcal{D}$ の元である任意の多面体 P について、それが *1* 次元以上であるとき、その任意の相対内点の競争モードを**多面体 P の競争モード**という。多面体 P が *0* 次元の元で、一点のみからなる集合については、相対内点は存在しないが、その点の上の競争モードを細胞分割 $\mathcal{D}$ の元としての競争モードと定義する。空集合の競争モードは空集合とする。

次の定義もおこう。

定義 3.9 (内部分割)
集合 $\mathcal{D}$ を多面体 Δ のある細胞分割とする。このとき、$\mathcal{D}$ の *1* 次元以上の元 P については、その相対内部 $\mathrm{int}(P)$ を、*0* 次元である元 P についてはそれ自身を取り直した集合を細胞分割 $\mathcal{D}$ の内部分割という。

細胞分割 $\mathcal{D}$ の内部分割を $\mathcal{D}^o$ としよう。内部分割 $\mathcal{D}^o$ の異なる元は共通集合をもたない、すなわち両者の共通集合は空集合である。しかし、Δ の任意の点は、かならず内部分割 $\mathcal{D}^o$ のどれかの元に属している。言い換えれば、内部分割は Δ を排他的に被覆している。内部分割は空集合を含まず、1 次元以上の元はすべて開集合である。この定義によって、次の定理が成立する。

定理 3.5 (内部分割はモード分割)
??集合 $\mathcal{D}$ を増補技術系の定義する賃金率 Δ の分割とする。$\mathcal{D}$ の内部分割の任意の元である集合の各点は同じ競争モードをもち、逆に異なる競争モードをもつ点は内部分割の異なる元に属する。

証明
すでに見たように、内部分割 $\mathcal{D}$ の各元の各点は同じ競争モードをもっている。逆に、同じ競争モードをもつ二つの異なる賃金率体系は、おなじ増補技術系が定義する多面体の相対内部にある。

このことから、増補技術系が定義する賃金率 Δ の分割 $\mathcal{D}$ は、閉集合として細胞分割であり、その内部分割 $\mathcal{D}^o$ を取るとき、技術集合に対応するモード分割を与えている。分割 $\mathcal{D}$ と分割 $\mathcal{D}^o$ とは、ある元の境界点をそれ自身に含めるか含めないかの違いであり、本質的には同じ分割と考えることができる。この意味で、モード分割は細胞分割を定めるということができる。

内部分割 $\mathcal{D}$ の空集合を除くすべての元 P には、ひとつの競争モードが定義されている。3.2 項では、賃金率体系の各点について「弱い意味での特化」、「強い意味での特化」、「弱い意味で分担的」、「強い意味で分担的」という概念を定義した。同様の定義を内部分割の各元および (1 次元以上の場合には代表点を相対内点に限定すれば) 細胞分割 $\mathcal{D}$ の (内部分割) 各元についても与えることができる。内部分

割の各元および細胞分割の元の相対内部に弱い意味の特化パタンを指定する写像 wSP( ) : $\mathcal{D} \to \{1, \cdots, M\}$ を弱い付値写像、強い意味での特化パタンを指定する写像 sSP( ) : $\mathcal{D} \to \{1, \cdots, M\}$ を強い付値写像という。

3.4 強い分担的特化パタンの存在定理

この項では、賃金率 Δ の細胞分割の中に強い意味での特化パタンで分担的であるものが存在するという定理を与える。

賃金率 Δ のある点の特化パタンが強い意味で分担的であるとすると、各財 n につきひとつの国 j が定まり、その国の n 財を生産するある技術が強い意味で競争的となる。すなわちこの点では、各財につき、ある技術が存在して、それが強い意味で競争的であり、他の国の技術はその財については競争的とならないことを意味する。

前項 3.3 で見たように、細胞分割 $\mathcal{D}$ の任意の元 P の相対内点のすべての点は同じ競争モードをもち、各細胞 P ごとに強い付値写像 $sSP(P)$ が定義される。この像がすべての国記号を含むとき、特化パタンは強い意味で分担的となる。ある点の特化パタンが強い意味で分担的であるならば、その十分小さい近傍の点においても、特化パタンは強い意味で分担的となる。すなわち、特化パタンが強い意味で分担的な点の集合は Δ の開集合をなす。Δ の多面体の中で相対内点が開集合となりうるのは、$(M-1)$ 次元の多面体に限られる。したがって、ある細胞の特化パタンが強い意味で分担的であるなら、それは $(M-1)$ 次元の細胞でなければならない。

定理 3.6 (強い存在定理)
世界には M 個の国があり、N 種類の財があるとする。このとき、各国 S がそれぞれ生産的な投入係数行列 $A(S)$ をもつとする。Δ のどの点 $(w^1, w^2, \ldots, w^M)$ においても、ある財については少なくともひとつの国が強い意味で競争的であるとする。このとき、競争関係による細胞分割においてある $(M-1)$-多面体 P が存在して、その内点では各国がすくなくとも一つの財につき強い意味で競争的となる。

定理 3.6 の仮定は、$N \geq M$ のとき非常に緩やかな条件 (つまり例外的事例を除いて一般に成立する条件) であるが、これを見ていただけではそのことは分らない。証明は後回しにして、定理の仮定の十分条件をまず考えよう。

いま、定理の仮定を満たさない点 $\mathbf{w}^e$ があるとすれば、その点においては少なくとも各財 j につきすくなくとも二つの国の技術 τ があり、それらすべてについて

$$w^{C(\tau)} = \langle a^{\tau} \ , \ \mathbf{p} \rangle \tag{15}$$

が成立する。$\mathbf{w}^e$ における競争的な技術の集合を Θ と書くことにすれば、この集合は $2N$ 以上の元を含んでいる。その個数を G としよう。国の数 M より財の数 N が大きいか等しいとき、$G \geq 2N \geq M + N$ 。ここで、2.2 項の最後に導入した技

術集合すべてを並べる行列表現をとろう。行列 $A(\Xi)$ から Θ に属する技術のみをとりだした行列を $\{-I(\Theta)\ ,\ A(\Theta)\}$ と書くことにすれば、G 行 $(M+N)$ 列の長方行列であり、方程式 (15) から、方程式

$$\{-I(\Theta)\ ,\ A(\Theta)\}\begin{bmatrix}\mathbf{w}^e\\ \mathbf{p}\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

が非負で自明でない解 $(\mathbf{w}^e,\mathbf{p})\neq\mathbf{0}$ をもつ。これより、行列 $\{-I(\Theta)\ ,\ A(\Theta)\}$ から任意に $M+N$ 個の行を取り出した正方行列 $\{-I\ ,\ A\}$ の行列式は 0 でなければならない。なぜなら、$\{-I(\Theta)\ ,\ A(\Theta)\}$ の行を抜き出した部分行列 $\{-I\ ,\ A\}$ についても、

$$\{-I\ ,\ A\}\begin{bmatrix}\mathbf{w}^e\\ \mathbf{p}\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

が成り立つはずであるが、もしその行列式が 0 でなく、$(M+N)\times(M+N)$ 正方行列 $\{-I\ ,\ A\}$ が逆行列をもつなら、

$$\mathbf{w}^e=\mathbf{0},\quad \mathbf{p}=\mathbf{0}$$

でなければならない。それでは、方程式 (15) は $\mathbf{0}$ でない非負ベクトル $\mathbf{w}^e$ および $\mathbf{p}$ を解にもちえない。しかし、行列 $\{-I(\Xi)\ ,\ A(\Xi)\}$ から任意に $M+N$ 個の行を取り出した行列 $\{-I\ ,\ A\}$ の行列式は一般に 0 ではない。これより、強い定理の仮定が (例外的な場合を除いて) 一般に成り立つことが分かる。

強い定理の証明は、概略以下のように与えられる。

証明 (定理 3.6 の証明)
いくつかの段落に分けて証明する。

段落 1
技術 Ξ の定義する競争関係による細胞分割を $\mathcal{D}$ 、強い付値写像を sSP とする。細胞分割 $\mathcal{D}$ の元である凸多角形を P とする。この多角形の相対内点においては、どの点においても競争モードは一定であり、P に強い意味での競争的な国のリスト $\{j_1,\ j_2,\dots,\ j_K\}$ が定まる。ただし、$0\leq K\leq N$。これが細胞分割 $\mathcal{D}$ に付値された強い意味での特化パタン $\mathrm{sSP}(P)=\{j_1,j_2,\dots,j_K\}$ である。*(*定義**??**を参照せよ*)*。

段落 2
任意の凸多角形 P の重心を *G(P)* と表記することにしよう。Δ の重心は *G(*Δ*)* である。細胞分割 $\mathcal{D}$ の任意の元の重心である点の集合を $\mathcal{D}$ の重心集合と呼ぶ。細胞分割を $\mathcal{D}$ の強い付値写像がひとつ与えられるとき、細胞分割の基礎集合である Δ から Δ への連続関数 f を以下のように定義する。細胞分割 $\mathcal{D}$ の任意の元の重心に対し、関数 f_G を以下により定義する*:*

$$f_G(G(P))=\frac{1}{\sharp(\mathrm{sSP}(P))}\sum_{j\in\mathrm{sSP}(P)}\mathbf{e}(j).\tag{16}$$

ここで、$\sharp(S)$ は集合 S の元の個数、$\mathbf{e}(j)$ は $(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ とする。ただし、1 は第 j 座標にのみ一回現るとする *(*つまり $e[i]$ は Δ の頂点のひとつである*)*。この定義は $\mathrm{sSP}(P)$ が空集合のときには無効となるが、定理の仮定により $\mathrm{sSP}(P)$ はけっして空集合とはならない。この定義により、細胞分割 $\mathcal{D}$ の重心集合の各点に対し、関数 f_G が定義された。この関数 f_G を帰納的に以下の手続きで Δ のすべての点の上の関数 f に拡大する。

1. 細胞分割 $\mathcal{D}$ の元 P で次元 0 のものをとろう。これは基礎集合が 1 点のみから多角形で、それ自身が多角形の重心に当たる。そこで Δ の元で細胞分割 $\mathcal{D}$ の 0 次元面の基礎集合上では $f(X) = f_G(X)$ と定義する。

2. 細胞分割 $\mathcal{D}$ の元 Q で次元 *d-1* のものの基礎集合まで関数 f が定義されたとする。このとき、$\mathcal{D}$ の元 P で次元 d のものを任意に取ろう。凸多角形 P のファセット *Q(P* の *d-1* 次元の面で*)* を一つ取ろう。*G(P)* は面 Q の外部にある。そこで多角形 Q を底とし *G(P)* を頂点とする多角錐を R としよう。多角錐 R の基礎集合の任意の点Xは、P の重心 *G(P)* とあるファセット Q の点Yとを結ぶ線分上にある。そこで関係

$$X = a\,G(P) + (1-a)\,Y$$

   を満たす点 X に対し、関数 f を次で定義する*:*

$$f(X) = a\,f(G(P)) + (1-a)\,f(Y). \tag{17}$$

3. 凸多角形 P の任意の他のファセット Q' についても同様の拡大を行う。このとき、二つの異なるファセット Q と Q' が共通部分をもつとき、Q においても Q' においても $f(Y)$ は同一の値が定義されているので、定義 *(17)* は多角形 P の基礎集合の全体にまで矛盾なく拡大される。

4. このようにして、$N-1$ 次元まで拡大すれば、$\mathcal{D}$ の重心集合上の関数 f_G を拡大する Δ から Δ への区分的に線型な関数 f に連続に拡大できる。

段落 3

ここで定理の仮定に戻ろう。定理を矛盾により証明する。

いま細胞分割 $\mathcal{D}$ の任意の元 P に付値される強い意味での特化パタンが分担的でないとすると、上に構成された関数はけっして $G(\Delta)$ の値をとらないことが分かる。じっさい、$\mathcal{D}$ の元 P に付値される強い意味での特化パタンが分担的でないとしてみよう。このとき、$\mathrm{sSP}(P)$ はすべての国記号を含み得ないから、定義式 (16) より重心集合上の関数 f_G はけっして $G(\Delta)$ の値を取らない。いま、$\mathrm{sSP}(P)$ から除外された国番号のひとつを m としよう。多面体 P では m 国は強い意味で競争的ではありえない。$\mathcal{D}$ の任意の元 P の頂点を $Y_1, Y_2, \ldots, Y_K$ とするとき、これら点は、多面体 P の境界上の点であるから、国番号 m を含むことはできない。したがって、

これらの点の f_G による像は、Δ の頂点 $\mathbf{e}(\mathbf{m})$ の対面内にあり、重心 $G(\Delta)$ と交わらない凸多角形 P_f を構成する。式 (17) による構成から、$f(P) = \{f(X)|X \in P\}$ も凸多角形 P_f に包まれる。したがって、写像 f は重心 $G(\Delta)$ に値をとらない。

段落 4

これより、Δ から Δ への連続関数で値 $G(\Delta)$ をけっしてとらない関数 $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ が構成された。これは $\Delta \longrightarrow \Delta \setminus G(\Delta)$ なる連続関数 f が構成されたと言ってもよい。ところで、この関数を Δ の境界　$\partial(\Delta)$ 上に制限すると、$f \mid \partial(\Delta)$ は $N-2$ 次元の球面 $S(N-2)$ から $S(N-2)$ への連続関数とみなせる。これは恒等写像にホモトピックであり、*0(定数関数ホモトープな元)* でない写像である。しかし、$f : \Delta \longrightarrow \Delta \setminus G$ の存在は、$f \mid \partial(\Delta) : \mathrm{S}\ (N-2) \longrightarrow \mathrm{S}\ (N-2)$ が定数関数にホモトープであることを意味しており矛盾。これは段落 3 において定理の成立を否定したことから起こった。これより定理の仮定がなりたつとき、$\mathcal{D}$ の少なくもひとつ元において付値される強い意味での特化パタンが分担的でなければならないことを意味する。

段落 5

ある点が強い意味で分担的とすると、各国は少なくともひとつ財において競争的であり、その産業においては他の国は競争的にはなりえない。これは点の位置をわずかに動かしても維持される条件であり、分担的な点の集合はかならず開集合となる。$\mathcal{D}$ の元でその相対内点が Δ の開集合となるのは $M-1$ 次元の多面体に限られる。つまり段落 4 において存在を保証された多面体は $(M-1)$-多面体にほかならない。これが定理の主張に他ならない。

証明おわり

3.5　頻度に関する数値実験の結果

定理 3.6(強い存在定理) から、ほとんどの場合、強い意味での分担的特化パタンが存在することがわかる。しかし、例外も存在することは確かである。そこで、そのような例外がどのくらいの頻度で出現するかという問題が生まれる。

この問題は、生産係数がどの範囲で、どのような確率で分布するかに依存する。定理 3.6 の直後に説明したことから分かるように、定理の仮定が成り立たない係数たちの組は、係数たちの張る空間より小さな次元しかもちえない。もし生産係数が実数であり、一定の範囲ですべての実数が同じ確率で出現すると仮定するなら、強い意味での分担的パタンの存在しない確率は 0 である。係数が整数の範囲のみを動くとき、このような計算は簡単にはできず、強い分担的パタンの存在しない確率は正になるが、その大きさは取りうる整数の範囲や生産係数行列の出現確率のとり方に依存する。以下は、いくつかの条件のもとにコンピュータによって出現確率を調べた結果である。第 2 行目の例程度の大きさの場合、確率は実質的に 0 であり、実数の場合に近づいている。

国と財の数	係数の種類	係数の範囲 対角要素	非対角要素	事例の総数	存在しない例の数	確率
3国3財	整数	[1, 9]	[0, 5]	100,000	487	0.0050
3国3財	整数	[1, 18]	[0, 10]	100,000	0	0.0000
3国3財	実数	[1, 9]	[0, 5]	100,000	0*	0.0000

* 強い分担的な領域の存在をいうには、競争パタンに対応する生産係数行列の逆行列が非負の場合にのみ、解が存在することを確認する手続きを取るが、実数係数の場合、逆行列の計算において誤差が生ずる。上の計算では、逆行列に負の要素が含まれないという判定において 10^{-6} 以下の負の項の出現は、正しくは0にあたるものの計算誤差と判断した。

係数の選ばれる範囲をおおきくすれば、強いパタンが存在しない例の出現頻度が減少することが分る。実数の場合に出現頻度が0である場合には接近するとかんがえれば、これは当然の結果である。

4 生産可能集合とその極大境界

これまで、基本的に価格関係のみを考察してきた。価格と生産との関係をより詳細に調べるには、それなりの準備が必要である。第4節で考察するのは、生産可能集合とその極大元、賃金率や価格との関係、生産可能集合の極大境界、それらの標準単体への射影、生産面と賃金面・価格面との対応関係などである。

4.1 生産可能集合の基礎的特性

まず、生産可能集合を定義しておこう。

定義 4.1 (生産可能集合)
財の数を N 、国の数を M とする経済において技術集合 Ξ と労働力量 (一定期間に投下しうる労働量) $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_M)$ が与えられたとする。このとき、最初の原材料などの必要投入財は調達できると仮定して、所与の労働力と技術によって純生産可能なベクトル全体の集合 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Xi, \mathbf{q})$ を所与の技術と労働力に関する生産可能集合という。

純生産ベクトルは非負とは限らない。以下の議論で必要なのは、生産可能集合の非負の方向の極大点の集合が作る面の構造でなので、生産可能集合を正象限 (非負象限) 内に限定して考えてもよいが、財による財の生産が行われるかぎり負の要素を含むすべてのベクトルを考えた方が自然である。

生産可能集合 $\mathcal{P}$ をより考察しやすい形で定式化するために、新しい記号法を導入しよう。経済にはN種類の財があり、すべてで K 個の技術があるとしよう。この場合、技術が属する国が異なれば、すべて異なる技術として数えることにして番号を付ける。第 k 番目の技術が $(-1, \mathbf{a}(k))$ と表されたとする。行列Aは $\mathbf{a}(k)$ を番号順に縦に並べてできる K 行 N 列の行列である。

労働投入部分については、すこし工夫を要する。異なる国の労働投入は異なる労働として区別しなければならないからである。そのため、経済に M 個の国が存在するとき労働を

M 次元のベクトルで表す。第 k 番目の技術 $(-1, \mathbf{a}(k))$ が第 j 国のものであるとき、投入は第 j 要素に 1 あるものとする。すなわち、技術 $(-1, \mathbf{a}(k))$ が第j国に属するとき、労働投入係数ベクトルを $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ と表す。ただし、1 は第 j 番目のみに現れる。このように表した労働投入係数を番号順にたてに並べた K 行 M 列の行列を I とする。第 2 では A と I とはひとつの技術系に対応するものとして N 行 N 列および N 行 1 列の行列であったが、第 4 ではすべての技術を一括して考えるために、このような表現を用いる。世界には M 国あり、N 種の財が存在するとするとき、各国は少なくとも N 種の技術をもつから、技術の個数 L は $N\,M$ 以上である。$M \leq 2, N \leq 2$ でないかぎり、$K \geq N\,M > M + N$ であり、行列 A は正方行列ではありえない。

以上の記号法により、生産可能集合 $\mathcal{P}$ は集合として次のように表される。

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \mid \ \mathbf{y} = \mathbf{s}\,A,\ \mathbf{s}\,I \leq \mathbf{q},\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^K\} \tag{18}$$

ここで、 $\mathbf{q} = (q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_M)$ は各国の労働力量、 $\mathbf{s} = (s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_L)$ は各技術の生産水準を表す。4.3 項に示すように、これは各国の生産可能集合のミンコフスキー和である。一国の生産可能集合は生産ベクトルの凸結合の q_i 倍であるから、凸多面体である。したがって、世界全体の生産可能集合も凸多面体であることも分る。

定理 4.1 (生産可能点であるための必要十分条件)
経済には M 個の国と N 種類の財が存在するとする。生産係数行列を A, 労働投入係数行列を I、各国の労働力量を $\mathbf{q}$ とする。このとき、任意のベクトル $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ が生産可能である、すなわち不等式

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}\,A, \quad \mathbf{s}\,\mathbf{I} \leq \mathbf{q}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^K \tag{19}$$

が非負解 $\mathbf{s}$ をもつための必要十分条件は、

$$A\,\mathbf{p} \leq I\,\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \tag{20}$$

を満たすそれぞれ M 次の縦ベクトル $\mathbf{w}$ および N 次の任意の *(正負の要素を含む)* 縦ベクトル $\mathbf{p}$ に対し

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle \leq \langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle$$

が成立することである。[13]

証明
不等式を直接考える代わりに

$$\mathbf{t} = \mathbf{q} - \mathbf{s}\,I$$

とおけば、式 *(19)* が非負解 $\mathbf{s}$ をもつことは

$$(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \begin{pmatrix} A & -I \\ O & -E \end{pmatrix} = (\mathbf{y}, -\mathbf{q})$$

が非負解 $(\mathbf{s}, \mathbf{u})$ をもつことと同値である。ただし、O は M 行 N 列のゼロ行列、E は M 次の単位行列である。

Minkowsky – Farkas の定理により、これは

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \tag{21}$$

[13] この定理は二階堂副包 (1961, p.132) の例と同値である。

を満たす任意の $\mathbf{p},\ \mathbf{w}$ に対し、

$$\langle\ (\mathbf{y}, -\mathbf{q}),\ \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}\ \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle \leq 0$$

が成り立つことが必要十分である。ここで、第２式はベクトル w が非負であること、第一式は定理における式 (20) に他ならない。 **証明終わり**

定理 4.1 より、ある点が生産可能集合の境界点である必要十分条件も簡単にもとまる。

系 4.2 (境界点である条件)
ベクトル $\mathbf{z}$ が生産可能集合 $\mathcal{P}(\Xi\ ,\ \mathbf{q})$ の境界点であるためには、

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle \leq \langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle$$

を満たす非退化 *(0 でない)*$\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$) に対し、

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q},\ \mathbf{w} \rangle \tag{22}$$

が成り立つことである。**証明終わり**

証明
式 (22) をみたす $\mathbf{w},\ \mathbf{q}$ は、同時に定理 4.1 を満たすから、生産可能集合 $\mathcal{P}(\Xi\ ,\ \mathbf{q})$ は式 (22) が定める半空間に含まれ、かつ $\mathbf{z}$ は超平面 (22) 上ある。これは、$\mathbf{z}$ が生産可能集合 $\mathcal{P}(\Xi, \mathbf{q})$ の境界にあることと同値である。なお、$\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ならば、$\mathbf{p} = \mathbf{0}$ となるから、$\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ のいずれかが退化しない条件は、$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ で与えられる。

4.2 生産可能集合の極大元

生産可能集合 $\mathcal{P}$ の元 $\mathbf{y}$ がひとつ与えられたとしょう。この元について、命題「$\mathcal{P}$ の点 $\mathbf{z}$ で $\mathbf{z} \geq \mathbf{y}$ かつ $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}$ となるものは存在しない。」が成り立つとき、点 $\mathbf{y}$ を生産可能集合 $\mathcal{P}$ の**極大元**と呼ぶ。極大元のすべての集合を**極大境界**という。これは一般にひとつの面ではなく、生産可能集合 $\mathcal{P}$ のいくつかのファセットとその面を含む集合である。極大境界を構成するひとつひとつの面を**極大面**という。極大元は文献によっては効率的な点あるいは有効工程などとも呼ばれている。
生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大元 $\mathbf{y}$ については次の定理が成立する。

定理 4.3 (極大元の特性定理)
経済には M 個の国と N 種類の財が存在し、すべての国がそれぞれ少なくともひとつ生産的な技術系をもつとする。生産係数行列を A, 労働投入係数行列を I、各国の労働力量を $\mathbf{q}$ とする。点 $\mathbf{y}$ が $\mathcal{P}$ の極大元であるとき、N 次および M 次の正の縦ベクトル $\mathbf{p}$ および $\mathbf{w}$ で

$$A\,\mathbf{p} \leq I\,\mathbf{w} \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{y},\ \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q},\ \mathbf{w} \rangle \tag{23}$$

を満たすものが存在する。逆に、関係式 (23) を満たす N 次および M 次の正の縦ベクトル $\mathbf{p}$ および $\mathbf{w}$ が存在するとき、$\mathcal{P}$ の元 $\mathbf{y}$ は $\mathcal{P}$ の極大元である。

証明のまえに次の補助定理を証明しておこう。

補助定理 4.4 (極大元の必要条件)
生産可能集合 $\mathcal{P}$ が

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}\,A, \quad \mathbf{s}\,I \leq \mathbf{q}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$

と表されているとする。ベクトル $\mathbf{y}$ が $\mathcal{P}$ で極大であるとき、実は $\mathbf{s}\,I = \mathbf{q}$ 。

証明
もし、ある国 m において $(\mathbf{s}\,I)_m < q_m$ となっていたとしょう。ここで $(\mathbf{s}\,I)_m$ は $\mathbf{s}\,I$ の第 m 要素を意味する。ここで m 国は生産的な技術系 γ をもつから、非負の生産規模ベクトル $\mathbf{s}'$ で技術系 γ に属する技術についてのみ正となり

$$\mathbf{z} = \mathbf{s}'\,A > \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{s}'\,I \leq q_m - (\mathbf{s}\,I)_m$$

を満たすものが存在する。このとき、$\mathbf{s}$ の代わりに $\mathbf{s}+\mathbf{s}'$ をとると、 $\mathbf{s}+\mathbf{s}'$ は非負でかつ

$$(\mathbf{s}+\mathbf{s}')\,A = \mathbf{y}+\mathbf{z} \quad \text{かつ} \quad (\mathbf{s}+\mathbf{s}')\,I \leq \mathbf{q}$$

となる。これは $\mathbf{y}$ より大きな生産可能ベクトル $\mathbf{y}+\mathbf{z}$ が存在することを意味する。これは、元 $\mathbf{y}$ が極大であったことに矛盾している。したがって、すべての m につき $(\mathbf{s}\,I)_m = q_m$ すなわち $\mathbf{s}\,I = \mathbf{q}$ 。**証明終わり**

証明 (定理 4.3 の証明)
まず、極大元の定義から不等式

$$(\mathbf{s}, 1)\begin{bmatrix} A & -I \\ -\mathbf{y} & \mathbf{q} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \text{ かつ } \neq \mathbf{0} \tag{24}$$

は非負の解 $\mathbf{s}$ をもたない。実際、もし式 (24) が非負解 $\mathbf{s}$ をもったとすると

$$\mathbf{s}\,A \geq \mathbf{y} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{s}\,A \neq \mathbf{y}$$

か、

$$\mathbf{q} \geq \mathbf{s}\,I \quad \text{かつ} \quad \mathbf{q} \neq \mathbf{s}\,I$$

が成り立つ。前者は、元 $\mathbf{y}$ が極大であることに反する。また、後者は補助定理 4.4 に反する。したがって、式 (24) を満たす非負の解 $\mathbf{s}$ は存在しない。

これより二階堂 (1961)$pp.157-8$ の補助定理（これは Kuhn-Tucker の定理の応用である）から、正のベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{w}$ で

$$\begin{bmatrix} A & -I \\ -\mathbf{y} & \mathbf{q} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

を満たすものが存在する。

これは書き換えると、

$$A\,\mathbf{p} - I\,\mathbf{w} \leq \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle \leq \langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle$$

を満たす正ベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{w}$ が存在することに他ならない。他方、$\mathbf{y}$ は生産可能集合 $\mathcal{P}$ の元であるから、定理 *4.1* より $\mathbf{p}$ と $\mathbf{w}$ は $\langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle \leq \langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle$ を満たす。両者を合わせて、

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle$$

が成立する。

逆に、関係式 (23) を満たす N 次および M 次の正の縦ベクトル $\mathbf{p}$ および $\mathbf{w}$ が存在するとしよう。このとき、ベクトル $\mathbf{z}$ についてかりに

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{z} \text{ かつ } \mathbf{y} \neq \mathbf{z}$$

となったとしよう。関係式 (23) とベクトル $\mathbf{p}$ が正であることから

$$\langle \mathbf{q} \ , \ \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{y} \ , \ \mathbf{p} \rangle < \langle \mathbf{z} \ , \ \mathbf{p} \rangle.$$

定理 4.1 より、ベクトル $\mathbf{z}$ は

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}A, \quad \mathbf{s}I \leq \ \mathbf{q}, \quad \mathbf{s} \geq 0$$

を満たす元、すなわち生産可能集合 $\mathcal{P}$ のではありえない。よって、関係式 (23) を満たすベクトル $\mathbf{y}$ は $\mathcal{P}$ の極大元である。

これで定理は証明された。**証明終わり**

定理 4.3 から、次の系を得る:

定理 4.5 (極大元の特性定理 第 2 型)
技術集合 Ξ と労働力ベクトル $\mathbf{q}$ を与件とする生産可能集合を $\mathcal{P}$ としよう。生産可能集合 $\mathcal{P}$ の元 $\mathbf{y}$ が非負の生産規模ベクトル $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_K)$ によって $\mathbf{y} = \mathbf{s}A \quad (\mathbf{s}I \leq \mathbf{q}, \ \mathbf{q} \geq \mathbf{0})$ と表されているとする。これが極大元であるための必要十分条件は、不等式

$$A \ \mathbf{p} \leq I \ \mathbf{w} \tag{25}$$

を満たす M 次および N 次の正ベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ とが存在して、次の 2 条件が成立することである。

(1) $\quad \langle \mathbf{s} \ , \ I \, \mathbf{w} - A \, \mathbf{p} \rangle = 0$
(2) $\quad \mathbf{s} \, I = \mathbf{q}$

証明
まず、ベクトル $\mathbf{y}$ が生産可能集合の極大元であるとしよう。不等式 (25) を満たす正ベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ が存在することは定理 4.3 が保証している。生産可能集合の元であるから、$\mathbf{s} \ I \leq \mathbf{q}$ を満たしている。したがって、

$$\langle \mathbf{y} \ , \ \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{s}A \ , \ \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{s}, \ A \ \mathbf{p} \rangle \leq \langle \mathbf{s} \ , \ I\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{s}I \ , \ \mathbf{w} \rangle \leq \langle \mathbf{q} \ , \ \mathbf{w} \rangle$$

が成り立つが、定理 4.3 より最初と最後の項は等しい。したがって、等式 (1) が成り立つ。また、$\mathbf{s} \ I \leq \mathbf{q}$ および $\langle \mathbf{s}I \ , \ \mathbf{w} \rangle \leq \langle \mathbf{q} \ , \ \mathbf{w} \rangle$ より等式 (2) が従う。

逆に、不等式 (25) を満たす正ベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ が存在し、等式 (1) および (2) が成り立つとすれば、上と同様の計算で $\langle \mathbf{y} \ , \ \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q} \ , \ \mathbf{w} \rangle$ を満たす。定理 4.3 の逆部分より、$\mathbf{y}$ は $\mathcal{P}$ の極大元である。**証明終わり**

等式 (1) は、使われている技術が競争的なものばかりであることを意味している。等式 (2) は、労働力が目いっぱい使われていることを意味する。定理 4.5 は、不等式 (25) を満たす正ベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ について、この 2 件が満たされることがベクトル $\mathbf{y}$ が極大元であるための必要十分条件であることを示している。この条件は使いやすい形であり、以下の考察でしばしば用いられる。

定理 4.3 のもうひとつの重要な系は、次の命題である。

命題 4.6 ($\mathbf{w}, \mathbf{p}$ の一対一対応)
各国が正の労働力 q_i をもつとする。技術集合 Ξ は単純生産、労働の不可欠の仮定を満たすものとし、各国は少なくともひとつ生産的な技術系をもつものとする。労働力ベクトル $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_M)$ を所与とする技術集合 Ξ に関する生産可能集合を $\mathcal{P}$ とし、$\mathbf{y}$ をその正の極大元とする。このとき、定理 (4.3) を満たす正のベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ とが与えられたとき、$\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ とは一対一に対応している。

賃金率体系 $\mathbf{w}$ を与えたとき、それに対応する世界最小価格を $\mathbf{p}$ とするとき、$\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ とが関係式 (25) を満たすことはすでに知っている。命題 4.6 は、正の極大元 $\mathbf{y}$ については、逆に (25) を満たす $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ とがあるとき、これらは賃金率体系とその世界最小価格体系の関係にあることを示している。

この一対一対応において注意しなければならないのは、この対応によって賃金率 Δ と価格 Δ の間に一対一の対応が定義されるが、それは係数倍を無視した関係であって、ひとつの賃金率 $\mathbf{w}$ が Δ 上にあっても、$\mathbf{w}$ に対応する世界最小価格 $\mathbf{p}$ は一般に価格 Δ 内にはないということである。逆もまた同様である。

証明
定理 (4.3) から、極大元 y の関し関係式 (25) を満たす $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ を任意に取ってみよう。賃金率体系 $\mathbf{w}$ を固定するとき、定理 2.7 から、関係式 (25) の第一式を満たす $\mathbf{p}$ には極大なものが存在する。それを $\mathbf{p}_*$ とするとき、もし $\mathbf{p}$ が $\mathbf{p}_*$ に等しくないとすると

$$\mathbf{p} \leq \mathbf{p}_* \text{かつ} \ \mathbf{p} \neq \mathbf{p}_*$$

より、

$$\langle \mathbf{y} \ , \ \mathbf{p} \rangle < \langle \mathbf{y} \ , \ \mathbf{p}_* \rangle = \langle \mathbf{q} \ , \ \mathbf{w} \rangle$$

となるから、$\mathbf{p}$ は関係式 (25) の第二式を満たしえない。したがって、所与の $\mathbf{w}$ に対し関係式 (25) を満たす任意ベクトル $\mathbf{p}$ は、定理 2.7 における極大元であり、$\mathbf{w}$ に対し唯一に定まっている。**証明終わり**

ある国が生産的な技術系と正の労働力をもつかぎり、生産可能集合 $\mathcal{P}$ は原点 $\mathbf{0}$ を含んでいる。多面体は有界であるから、これより $\mathbf{0}$ でない任意の非負ベクトル $\mathbf{x}$ に対し、$\mathbf{y} = t\,\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ となる t の正の上限が存在することが分かる。この上限に対応する非負ベクトル $\mathbf{y}$ は生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大元となる。

命題 4.7 (任意方向の極大元)
労働力ベクトル $\mathbf{q}$ が正のとき、定理 4.3 の状況を考える。$\mathbf{0}$ でない任意の非負ベクトル $\mathbf{x}$ に対し、$\mathbf{y} = \eta\,\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ となる η の正の上限が存在する。この上限に対応する非負ベクトル $\mathbf{y}$ は生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大元である。

証明
生産可能集合 $\mathcal{P}$ は閉集合だから $\mathbf{y}$ は生産可能であり、生産可能集合の定義から、$\mathbf{y}$ には以下の性質を満たす非負ベクトル $\mathbf{s}$ が存在する：

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}\,A, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}\,I \leq \mathbf{q}.$$

さて、$\mathbf{y}$ が極大元でないと仮定してみよう。生産可能集合 $\mathcal{P}$ の元 $\mathbf{z}$ で以下の条件を満たす N 次のベクトル $\mathbf{z}$ および L 次の非負ベクトル $\mathbf{t}$ が存在する：

$$\mathbf{z} - \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \text{ かつ } \mathbf{z} - \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} - \mathbf{y} = \mathbf{t}\,A, \quad \mathbf{t}\,I \leq \mathbf{0}.$$

これより、ある財 n について $(z-y)_n > 0$ となるものが存在する。これより、財 n を生産するある技術 k について、$t_k > s_k$ が成立する。実際、もしこのような k がなければ、財 n を生産するすべての技術について $\mathbf{t}$ の生産規模は $\mathbf{s}$ より小さいか等しく、$(z-y)_n \leq 0$ となってしまう。

ここで $\delta = t_k - s_k$ と取り、新しい生産規模ベクトル $\mathbf{t}'$ を以下で定義する：

$$t'_j = t_j \quad (j \neq k \text{ のとき}), \qquad t'_k = t_k - \delta \quad (j = k \text{ のとき})$$

このとき $\mathbf{u} = \mathbf{t}'\,A$ と置くと、$\mathbf{u}$ と $\mathbf{z}$ の違いは、第 k 技術の生産規模が δ だけ小さいことだから、$u_n \geq y_n$ 。また、$j \neq k$ のとき、生産係数 a^k_j は 0 あるいは負だから、$u_j \geq z_j$ 。これより、$\mathbf{u} \geq \mathbf{z}$。技術 k が m 国のものとしよう。各国は生産的な技術系をもつから、労働力 δ を用いてベクトル $\varepsilon\mathbf{x}$ を純生産することができる。ベクトル $\mathbf{u}$ にこの生産を加えても、必要労働力量は $\mathbf{q}$ を超えない。したがって、$\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{x}$ は生産可能集合 $\mathcal{P}$ に属する。これより、

$$\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{x} \geq \mathbf{y} + \varepsilon\mathbf{x} \geq (\eta + \varepsilon)\mathbf{x}.$$

これは、η が $\mathbf{y} = \eta\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ となるの正の上限であることに矛盾する。したがって、ベクトル $\mathbf{y}$ は極大でなければならない。**証明終わり**

命題 4.7 より、正の労働力ベクトル $\mathbf{q}$ に対応する生産可能集合 $\mathcal{P}$ が極大元をもつことがいえるばかりでなく、$\mathcal{P}$ の任意の非負方向の境界点は極大であることがいえた。このことと、定理 4.3 と補助定理 4.4 および系 4.5 とから、3.1 項の証明 3 がえられる。実際、生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大元を一つ取ると、定理 4.3 から賃金率体系 $\mathbf{w}$ と価格 $\mathbf{p}$ が存在して、補助定理 4.4 より各国は少なくともひとつ正の生産規模の技術をもち、系 4.5 からそれらは弱い意味で競争的でなければならない。よって、ある賃金率体系 $\mathbf{w}$ と対応の生産価格 $\mathbf{p}$ について、任意の国が少なくともひとつ競争的な技術をもつことが言える。

4.3 生産可能集合の概形

世界全体の生産可能集合を考えるとき、ミンコフスキー和の概念が有用である。ミンコフスキー和とは、ベクトル空間の部分集合の族にたいし、次の定義で与えられるベクトルの集合である。

定義 4.2 (ミンコフスキー和)
ベクトル空間の部分集合の族 $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_L$ に対し、それぞれから一点ずつをとり、それらの総和として表される点全体の集合 S を $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_L$ のミンコフスキー和という。

この定義により、世界全体の生産可能集合 $\mathcal{P}$ は各国の生産可能集合 $\mathcal{P}(i)$ のミンコフスキー和である。技術選択がない場合、各国の生産可能集合は（原材料投入があるかないかに関わらず）N-単体である。これは N 次元空間の N 個の生産係数ベクトル $\mathbf{a}^j$ と N 次元空間の原点 $\mathbf{0}$ の $N+1$ 個の頂点によって張られる凸多面体である。おなじ財を生産する技術が複数存在するとき、第 j 国の生産可能集合は、

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \mathbf{x} = \mathbf{s}\,A(j),\ \langle \mathbf{s}\,,\mathbf{1}\rangle \leq q_j,\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}$$

と表される。ただし、$A(j)$ は第 j 国の生産係数ベクトルのみからなる行列とする。これは有限個のベクトルの凸結合として、凸多面体である。世界全体の生産可能集合は、これら凸多面体のミンコフスキー和として凸多面体である。

中間財 (原材料) 投入のない場合の生産可能集合の特徴は、それが非負象限に正確に収まっていることである。これは次の二つのことを意味する。

- 生産ベクトルが財の空間において負の座標を持たない。
- どの非負のベクトル $\mathbf{x}$ も、ある生産可能ベクトル $\mathbf{u}$ があって、その正の係数倍となっている。すなわち、ある正の η があって、$\mathbf{x} = \eta \mathbf{u}$.

各財を生産するのに、労働投入以外に原材料も投入される場合であっても、技術選択がない場合には生産可能集合の $\mathcal{P}(m)$ の形は基本的には同じである。この場合も、技術系が生産的であるから、純生産投入係数行列 A は非負逆転可能である。したがって、N 個の純生産係数ベクトル $\mathbf{a}^n$ は一次独立である。これらに原点 $\mathbf{0}$ を加えた $N+1$ 個 のベクトルの凸包は N-単体である。生産に原材料が投入される場合とそうでない場合の違いは、労働投入のみの場合には生産可能集合は非負象限の部分集合であるのに対し、原材料投入がある場合には生産可能集合は非負象限に収まっているとは限らないことである。実際、原材料が投入される場合の生産面 Δ は、後出の図 4 のようになる。

生産可能集合 $\mathcal{P}$ はの境界面およびそれを構成しているファセット ($N-1$ 次元の面) は、どのような形をしているであろうか。任意の場合にその形状を知るのは難しいが、各国の技術集合が技術の選択をゆるさなず、各国のN個の単体が一般の位置にあるときは、比較的簡単である。ここで、N 個の単体が一般の位置にあるとは、それらの真の面 (1 次から $N-1$ 次までの単体の面) がどれも互いに平行でないことをいう。このとき、生産可能集合 $\mathcal{P}$ の面は、各構成集合の面のミンコフスキー和である。具体的には次のような可能性がある。

まず単体の面はまた単体であることに注意しよう。N 次元凸多面体の境界となるファセットは $N-1$ 次元の凸多面体である。したがって、世界生産可能集合 $\mathcal{P}$ のファセットの可能な形は、$n_1, n_2, \ldots, n_M$ を条件 $n_1 + n_2 + \cdots + n_M = N-1$ を満たすは非負の整数とするとき、n_1-単体、n_2-単体、$\cdots$ 、n_M 単体のミンコフスキー和である。ただし、0-単体はただの 1 点からなる集合とする。たとえば、$N=3$ (財の数が 3) の場合、

点×三角形＝三角形
線分×線分＝平行四辺形

という可能性があり、生産可能集合のファセットは、三角形か平行四辺形に限られる。ただし、この関係は、平行性を維持する形で平面状に投影した場合にのみ目視できる。後出の図 4 および図 5 において、生産面領域のうち四辺形のものが、平行四辺形でなく台形のように見えるのは、原点からの投影が平行性を維持しないためである。

実際にどの国のどの技術が稼動し、各ファセットが各国のどの単体から構成されるかを見るためには、もうすこし精密な議論が必要であるが、生産可能集合の非負方向の境界については、4.2 項までの考察によりすでに準備はできている。

まず、命題 4.7 より、生産可能集合の極大元は、任意の非負方向に存在することがわかっている。したがって、生産可能集合の非負方向の境界点はすべて極大元である。系 4.5 から、生産可能ベクトル $\mathbf{y} = \mathbf{s}A \quad (\mathbf{s}I \leq \mathbf{q},\ \mathbf{q} \geq \mathbf{0})$ が極大元であるためには、ベクトル y は、不等式 25 を満たす正のベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ について次の 2 つの条件を満たさなければならない。

$$\langle \mathbf{s}\ ,\ I\mathbf{w} - A\mathbf{p} \rangle = \mathbf{0}\ , \quad \langle \mathbf{y}\ ,\ \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}\ ,\ \mathbf{w} \rangle.$$

これを各国ごとに分解して考えてみよう。ベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ 競争モードを $\mathrm{CM}(\Xi, \mathbf{w})$ の元である技術を国ごとに整理して、それらの番号が

$$\begin{gathered} k(1,1), k(1,2), \cdots, k(1, C(1)) \\ k(2,1), k(2,2), \cdots, k(2, C(2)) \\ \cdots \\ k(M,1), k(M,2), \cdots, k(M, C(M)) \end{gathered}$$

となつたとしよう。各行は第 i 国の競争的な技術を列挙したものであり、それぞれ C(i) 個の技術をもつものとする。

系 4.5 の第 1 条件は、任意の番号 i について、もし $s_i > 0$ なら技術 $\tau(i)$ は競争的でなければならないこと、第 2 条件は、投入される労働量がその国の労動力量に等しいことを示している。したがって、第 i 国の生産は技術

$$\tau(k(i,1)),\ \tau(k(i,2)),\ \cdots,\ \tau(k(i,C(i)))$$

に対応する生産規模を

$$s_{(k(i,1))},\ s_{k(i,2)},\ \cdots,\ s_{k(i,C(i))}$$

とおくとき、極大元を与えうる第 i 国の生産の全体 $\mathcal{P}^e(i)$ は

$$\mathcal{P}^e(i) = \Big\{ \sum_{h=1}^{C(i)} a^{\tau(k(i,h))} \mid \sum_{h=1}^{C(i)} s_k(i,h) = q_i \Big\}$$

となる。これは、第 i 国の生産可能集合の極大元の一部となっている。世界の生産可能集合が各国の生産可能集合のミンコフスキー和であったと同様に、系 4.5 は、世界生産可能集合の極大元についても、それが各国の極大元のミンコフスキー和であることを示している。

［パワーポイント資料： 第 4 図 生産面 Δ への投影 労働投入のみ］

図 4: 中間財投入のない場合の生産面、原点から Δ への投影

4.4 極大境界のモード分割

生産可能集合の境界面の様子をさらに精密に調べるために極大元の競争モードとそれによる極大境界のモード分割という概念を導入する。

まず、ベクトル $\mathbf{y}$ が生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大元であるとする。これは生産可能ベクトルだから、ある生産規模ベクトル $\mathbf{s} = (s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_K)$ によって

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}\,A \quad \text{かつ} \quad \mathbf{s}\,I \leq \mathbf{q}$$

と書かれている。このとき、定理 4.5 より、正のベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ とがあって、

$$I\,\mathbf{w} - A\,\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{s}\,A \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{s}\,,\, I\,\mathbf{w} - A\,\mathbf{p} \rangle = 0$$

を満たす。このような生産規模ベクトル $\mathbf{t}$ がもうひとつあって $\mathbf{y} = \mathbf{t}\,A$ かつ $\mathbf{t}\,A \leq \mathbf{q}$ としよう。そのとき、ベクトル $\mathbf{t}$ も

$$I\,\mathbf{w} - A\,\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{t}\,A \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{t}\,, I\,\mathbf{w} - A\,\mathbf{p} \rangle = 0$$

を満たす。もし、そうでないとすると、$I\,\mathbf{w} - A\,\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ と $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ だから、

$$\langle \mathbf{t}\,, I\,\mathbf{w} \rangle > \langle \mathbf{t}\,, A\,\mathbf{p} \rangle.$$

これより、$\mathbf{q} \geq \mathbf{t}\,A$ に注意すると

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle \geq \langle \mathbf{t}\,I, \mathbf{w} \rangle > \langle \mathbf{t}, A\,\mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle$$

これは $\mathbf{y} = \mathbf{t}\,A$ が極大であることに反する。

ベクトル $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ は同じ等式、不等式を満たすから、その凸結合 $\alpha\mathbf{s} + (1-\alpha)\mathbf{t}$ も同じ等式、不等式を満たす。

極大元 $\mathbf{y}$ に対し、$\mathbf{y} = \mathbf{s}\,A, \quad \mathbf{s}\,I \geq \mathbf{q}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ を満たすベクトル $\mathbf{s}$ を任意にひとつとり、$s_i > 0$ となっている i の集合を $\mathrm{Pos}(\mathbf{s})$ とおこう。上に見たことより、$\mathbf{y} = \mathbf{t}\,A, \quad \mathbf{t}\,I \geq \mathbf{q}, \quad \mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ を満たすベクトル別のベクトル $\mathbf{t}$ をとると、

$$\mathrm{Pos}(\alpha\mathbf{s} + (1-\alpha)\mathbf{t}) = \mathrm{Pos}(\mathbf{s}) \cup \mathrm{Pos}(\mathbf{t})$$

であり、かつ $\alpha\mathbf{s} + (1-\alpha)\mathbf{t}$ はベクトル y を与える生産規模ベクトルのひとつである。このことから、極大元 y をひとつ固定するとき、$\mathrm{Pos}(\mathbf{s})$ は集合として極大なものをひとつもつことがわかる。そこで次の定義をおく。

定義 4.3 (極大元の競争モード)
ベクトル $\mathbf{y}$ を生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大元とする。このとき、$\mathbf{y} = \mathbf{s}\,A, \quad \mathbf{s}\,I \leq \mathbf{q}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ を満たす任意のベクトル $\mathbf{s}$ について集合 $\mathrm{Pos}(\mathbf{s})$ を取ると、これら集合の中に極大なものが存在する。それを極大元 $\mathbf{y}$ の競争モードといい、$\mathrm{CM}(\mathbf{y})$ と書く。

定義 4.3 より、生産可能集合 $\mathcal{P}$ の任意の極大元に競争モードが一義に定義されることが分かる。これまでの考察により、生産規模ベクトル $\mathbf{s}$ と正のベクトルの組 $\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ とがあり、それらが定理 4.5 の 2 条件を満たし、なおかつ $s_i > 0$ と $i \in \mathrm{CM}(\mathbf{y})$ とが同値となる。以上から、**生産可能集合の極大境界のモード分割**あるいは短く**生産可能集合のモード分割**が得られる。すなわち、$\mathcal{P}$ の極大境界のすべての点は同じ競争モードをもつ集合の相互に排他的な族 $\mathcal{M}$ に分けられる。

定義 4.3 における極大な集合がどのような条件で得られるかも見ておこう。次の命題がなりたつ。

命題 4.8 (極大な競争モード)
ベクトル $\mathbf{y}$ を生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大元とする。このとき、正のベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ および非負の生産規模ベクトル $\mathbf{s}$ について

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}\,A, \quad \mathbf{s}\,I = \mathbf{q}, \quad \text{さらに} \quad s_i > 0 \Longleftrightarrow i \in \mathrm{CM}(\mathbf{p})$$

ならば、$\mathrm{CM}(\mathbf{p}) = \mathrm{CM}(\mathbf{y})$。ただし、$\Longleftrightarrow$ は両側の命題が同値であることを意味する。

証明
極大な競争モードを与える生産規模ベクトルを $\mathbf{t}$ とする。$\mathbf{t}$ はベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ についても、等式

$$\mathbf{y} = \mathbf{t}A, \quad \mathbf{q} = \mathbf{t}I, \quad \langle \mathbf{t}, I\mathbf{w} - A\mathbf{p} \rangle = 0$$

を満たす。命題の仮定より、$\mathrm{CM}(\mathbf{p}) = \mathrm{Pos}(\mathbf{t}) = \mathrm{CM}(\mathbf{y})$。**証明終わり**

この命題は、ベクトル $\mathbf{y}$ が極大元であることを保障する任意の $\mathbf{w}$ と $\mathbf{p}$ と生産規模ベクトル $\mathbf{s}$ について、

$$\mathrm{Pos}(s) \subset \mathrm{CM}(y) \subset \mathrm{CM}(p)$$

となっていることを意味する。もし、$\mathrm{Pos}(s) = \mathrm{CM}(p)$ なら当然これら 3 項はすべて同じ集合となる。

極大境界のモード分割が生産可能集合のそれぞれの面に対応することが以下の考察から分かる。まず、定理 4.3 より、$\mathbf{y}$ が生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大元であるならば、正の賃金率体系 $\mathbf{w}$ と価格体系 $\mathbf{p}$ とが存在して

$$A\,\mathbf{p} \leq I\,\mathbf{w} \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle$$

が成立する。他方、定理 4.1 より、生産可能集合 $\mathcal{P}$ の任意の元 $\mathbf{z}$ は、いかなる $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ についても

$$A\,\mathbf{p} \leq I\,\mathbf{w} \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle \leq \langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle$$

を満たす。これより $A\,\mathbf{p} \leq I\,\mathbf{w}$ を満たす $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ をひとつ固定するとき、

$$\mathcal{P} \subset \{\mathbf{z} \mid \langle \mathbf{z}\,,\, \mathbf{p} \rangle \leq \langle \mathbf{q}\,,\, \mathbf{w} \rangle\}$$

となり、これは極大元 $\mathbf{y}$ を含むから空ではない。したがって、

$$\mathcal{P} \cap \{\mathbf{z} \mid \langle \mathbf{z}\,,\, \mathbf{p} \rangle \leq \langle \mathbf{q}\,,\, \mathbf{w} \rangle\}$$

は、多面体 $\mathcal{P}$ のある面 F を定義している。

多面体 $\mathcal{P}$ の面について調べるために、まず次の定義おく。

定義 4.4 (競争モードに随伴する生産可能集合)
集合 M を技術集合 Ξ の部分集合とする。このとき、次式で定義される集合

$$P(M) = \{ y = s\,A \quad | \quad s \geq 0, \quad sI = q \text{ かつ } s_i > 0 \text{ なら } i \in M \quad \}$$

を競争モード M に随伴する生産可能集合という。

さて、面 F を定義する $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ をひとつ取るとき、不等式

$$A\,\mathbf{p} \leq I\,\mathbf{w}$$

が成り立つ。このとき、この不等式を等号で満たす技術の集合、すなわち w と p とに関する競争モードを $\mathrm{CM}(\mathbf{p})$ としよう。このとき、競争モード $\mathrm{CM}(\mathbf{p})$ に随伴する生産可能集合 $\mathcal{P}(\mathrm{CM}(\mathbf{p}))$ とすると、次の命題がなりたつ。

命題 4.9 (生産可能集合の面の表現定理)
技術集合 Ξ と正の労働力ベクトル $\mathbf{q}$ に対応する生産可能集合 $\mathcal{P}$ とする。生産可能集合 $\mathcal{P}$ の面 F がある正ベクトル $\mathbf{w}, \mathbf{p}$ により、

$$F = \mathcal{P} \cap \{\mathbf{z} \mid \langle \mathbf{z}\,,\, \mathbf{p} \rangle \leq \langle \mathbf{q}\,,\, \mathbf{w} \rangle\}$$

と表されているとする。このとき、ベクトル $\mathbf{p}$ における競争モードを $\mathrm{CM}(\mathbf{p})$ とするとするとき、次の等式がなりつたつ:

$$F = \mathcal{P}(\mathrm{CM}(\mathbf{p})).$$

証明
生産規模ベクトル $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\cdots,c_K)$ で条件 $\mathbf{s}\,I=\mathbf{q}$ を満たす任意の非負ベクトル $\mathbf{s}$ について $\mathbf{y}=\mathbf{s}\,A$ とおけば、定理 *4.5* により、$\mathbf{y}$ は $\mathcal{P}$ の極大元となっている。ベクトル $\mathbf{y}$ は等式 $\langle\mathbf{z}\,,\,\mathbf{p}\rangle=\langle\mathbf{q}\,,\,\mathbf{w}\rangle$ を満たすから、これは面 F の元である。

逆に、面 F の任意の元 z はこのように表現される。実際、$\mathbf{z}$ は生産可能集合 $\mathcal{P}$ の元で極大元であるから、ある生産規模ベクトル $\mathbf{t}$ について、$\mathbf{z}=\mathbf{t}\,A$ かつ $\mathbf{t}\,I=\mathbf{q}$ となっている。この生産規模ベクトル $\mathbf{t}$ は面 F の定義から $\langle\mathbf{z}\,,\,\mathbf{p}\rangle=\langle\mathbf{q}\,,\,\mathbf{w}\rangle$ を満たす。これより、$\langle\mathbf{t},I\,\mathbf{w}-A\,\mathbf{p}\rangle=0$. $I\,\mathbf{w}-A\,\mathbf{p}\geq\mathbf{0}$ から $s_i>0$ なら $i\in CM(\mathbf{p})$. したがって、ベクトル $\mathbf{z}$ は $\mathcal{P}(\mathrm{CM}(\mathbf{p}))$ の元である。**証明終わり**

引き続き F を生産可能集合 $\mathcal{P}$ の面であるとする。このとき、F の相対内点 $\mathbf{y}$ の競争モードは $\mathrm{CM}(\mathbf{y})$ となる。命題 4.9 より、$\mathbf{y}$ 点は生産規模ベクトル $\mathbf{s}$ と正のベクトル $\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ とによって

$$\mathbf{y}=\mathbf{s}\,A,\quad s\geq 0,\quad q=sI,\quad \langle\mathbf{s},\mathbf{w}\,I-\mathbf{p}\,A\rangle=0$$

と表される。ところで、$\mathbf{y}$ 点が F の相対内点にあることから、$i\in\mathrm{CM}(\mathbf{p})$ と $s_i>0$ とは同値となる。したがって、命題 4.8 より、$\mathrm{Pos}(s)=\mathrm{CM}(\mathbf{p})=\mathrm{CM}(y)$。

面 F の相対内部の各点 $\mathbf{y}$ は、同じ競争モードをもつ。実際、命題 4.9 より、F の各点 $\mathbf{z}$ は

$$F=\mathcal{P}\cap\{\mathbf{z}\mid\langle\mathbf{z}\,,\,\mathbf{p}\rangle\leq\langle\mathbf{q}\,,\,\mathbf{w}\rangle\}$$

と表される。ベクトル $\mathbf{z}$ は相対内部にあるから、

$$\mathbf{z}=\mathbf{s}\,A,\quad \mathbf{s}\geq 0,\quad \mathbf{q}=\mathbf{s}\,I,\quad \langle\mathbf{s}\,,\,I\,\mathbf{w}-A\,\mathbf{p}\rangle=0\quad \text{かつ}\ s_i>0\Longleftrightarrow i\in\mathrm{CM}(p).$$

これは、ベクトル $\mathbf{z}$ の競争モードが面 F を定義する $\mathbf{p}$ による競争モード $\mathrm{CM}(\mathbf{p})$ とおなじことを意味している。

これより、生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大境界の各面は、それが一点のみからなる場合を除いて同じ競争モードをもつ。面が一点のみからなるとき、その面の競争モードはその点の競争モードと定義すれば、生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大境界のすべての面にひとつの競争モードを定義することができる。この競争モードは、極大境界の各点に定義した競争モードと矛盾しない。賃金率 Δ の細胞分割がひとつのモード分割であったとおなじように、生産可能集合の極大境界は自然な形でモード分割される。この極大境界の細胞分割をもモード分割と呼び、$\mathcal{M}$ と区別して $\mathcal{E}$ と書くことがある。

生産可能集合の極大境界は、一般に、ある正のベクトル $\mathbf{u}$ と正の数 c について

$$\langle\mathbf{y}\,,\,\mathbf{u}\geq c$$

を満たす半空間の中に存在している。ベクトル $\mathbf{u}$ を各面を定義する $\mathbf{p}$ のいずれよりも大きく、c を $\langle\mathbf{q},\mathbf{w}\rangle$ のいずれよりも小さくとれば、このような条件は満たされる。極大境界の各点 y と原点とを結び、超平面 $H=\{y\quad|\quad\langle\mathbf{y}\,,\,\mathbf{u}\geq c\}$ と交わる点 $\mathbf{x}$ を $\mathbf{y}$ の超平面上への投影と呼び、$\mathbf{x}=Sr(\mathbf{y})$ と書く。投影 Sr によって極大境界の各要素は、H の多角形に写される。とくに原材料投入のない場合には、これらの点は、H と正象限との共通部分である単体 Δ の上へと写される。Δ は標準単体ではないが、原材料投入のない場合には、Δ を標準単体に取り直しても同様である。このとき、極大境界の各面は生産空間の $N-1$ 次元標準単体 Δ の多角形に投影され、それらは Δ の細胞分割となっている。原材料投入のある場合には、投影された像は $N-1$ 次の単体と合致するとはかぎらないが、$N-1$ 次元の超平面上の多角形の細胞分割が得られる。これらを総称して、極大境界のモード分割の**生産面 Δ への投影**ということにする。

このような分割を具体的に求める方法については別途考察する。図 4 および図 5 は、3 国 3 財の場合の生産可能集合のモード分割を生産空間の標準単体に投影してみたものである。次の第**??**節では、このモード分割と賃金率 Δ、価格 Δ のモード分割との関係を調べる。

［パワーポイント資料：　第5図］

図 5: 原材料投入のある場合の生産面、原点からΔへの投影

5　生産点と賃金率・価格の双対性

これまでの考察を整理しよう。まず、考えているのは以下の状況である。世界には全部でM個の国があり、N種類の財があるとする。各国は少なくともひとつ生産的な技術系をもっている。世界全体の技術集合Ξは、単純生産の仮定と労働が不可欠であるという仮定を満たしている。また、各国は正の労働力q_iをもつとする。技術集合Ξは、K個の元をもつとし、K行N列の生産係数行列AとK行M列の労働投入行列Iによって表現できる。労働力ベクトルは$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_K)$で定義されるK次の横ベクトルである。賃金率体系はM次の縦ベクトル$\mathbf{w}$、価格はN次の縦ベクトル$\mathbf{p}$、生産規模はK次の横ベクトル$\mathbf{s}$で表現される。世界全体の生産可能集合は、$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Xi, \mathbf{q})$と書く。

このとき、賃金率Δと価格Δの間には、次の関係がある。まず、任意の賃金率体系$\mathbf{w}$に対し、価格体系$\mathbf{p}$が$\mathbf{w}$を与件とする世界最小価格として定義される。この価格体系$\mathbf{p}$は、所与の$\mathbf{w}$に対し不等式9を満たす極大なとものとしても特徴付けられる。各国の労働力が正であるとき、生産可能集合$\mathcal{P}$の極大元$\mathbf{y}$とそれを特徴付ける賃金率・価格体系$\mathbf{w}, \mathbf{p}$とをとるとき、$\mathbf{w}$と$\mathbf{p}$との間には一対一の対応が見られた。この関係により、賃金率Δの細胞分割は、価格Δの内部の細胞分割と対応つけられている。

5.1　極大境界と分担的な賃金率

生産可能集合$\mathcal{P}$の任意の極大元$\mathbf{y}$にたいし、任意の非負の賃金率体系$\mathbf{w}$および価格体系$\mathbf{p}$で

$$A\,\mathbf{p} \leq I\,\mathbf{w} \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{y}\,,\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{q}\,,\mathbf{w}\rangle$$

を満たすものadm($\mathbf{y}$)を考えよう。これを極大元$\mathbf{y}$の認容な賃金率・価格体系という。定理4.3からこの集合は空ではない。このとき、$Adm(\mathbf{y})$の元$\mathbf{w}, \mathbf{p}$は、生産可能集合$\mathcal{P}$の元$\mathbf{z}$に対し、次の性質をもつ:

$$\langle \mathbf{z}\,,\mathbf{p}\rangle \leq \langle \mathbf{q}\,,\mathbf{w}\rangle.$$

つまり、$\mathbf{p}$と$\langle \mathbf{q}, \mathbf{w}\rangle$は$\mathcal{P}$の妥当な線形不等式を定義している。したがって

$$\mathcal{P} \cap \{\mathbf{z} \mid \langle \mathbf{z}\,,\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{q}\,,\mathbf{w}\rangle\}$$

は、多面体$\mathcal{P}$のある面Fを定義している。多面体Fは極大元$\mathbf{y}$を含むが、この多面体はadm($\mathbf{y}$)の選び方に依存して変動しうる。ベクトル$\mathbf{w}$,　$\mathbf{p}$に対し、$(I\,\mathbf{w} - A\,\mathbf{p})^j$が0とな

る技術の (番号 j の) 集合を競争モードといい、CM($\mathbf{w},\mathbf{p}$) と書く。極大元 $\mathbf{y}$ の認容な賃金率・価格体系 Adm($\mathbf{y}$) の競争モードには唯一の極大なものが存在する。それを $\mathbf{y}$ の競争モードといい CM($\mathbf{y}$) と書く。元 $\mathbf{y}$ の認容な集合 $Adm(\mathbf{y})$ のうちで極大な競争モードをもつものの一組を $\mathbf{w}_*, \mathbf{p}_*$ としよう (これは唯一定まるとはかぎらない)。命題 4.3 によって、それらは生産規模ベクトル $\mathbf{s}^*$ で

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}^* A\,,\ \mathbf{q} = \mathbf{s}^* I\,,\ \mathbf{s}^* \geq 0, \langle \mathbf{s}^*\,,\, I\,\mathbf{w}_* - A\,\mathbf{p}_* \rangle = 0 \quad \text{かつ} \quad s_i^* > 0 \Longleftrightarrow i \in CM(\mathbf{w}_*, \mathbf{p}_*)$$

を満たすものが存在する。逆に、このような生産規模ベクトル $\mathbf{s}^*$ が存在するとき、CM($\mathbf{w},\mathbf{p}$) = CM($\mathbf{y}$) が保障される。

このようなベクトル $\mathbf{w}_*, \mathbf{p}_*$ も多面体 $\mathcal{P}$ のある面 F を定義する。このとき、$\mathbf{y} = \mathbf{s}^* A$ かつ $\mathbf{q} = \mathbf{s}^* I$ かつ $s_i^* > 0 \Longleftrightarrow i \in CM(\mathbf{w}_*, \mathbf{p}_*)$ が成立するから、面 F はただ一点からなり、極大元 $\mathbf{y}$ 自身の集合と一致するか、そうでなければ、元 $\mathbf{y}$ は面 F の相対内部にある。このことは、ベクトル $\mathbf{s}^*$ の正の値をもつ番号の集合が CM($\mathbf{y}$) と一致することから従う。この面 F を極大元 $\mathbf{y}$ の**支持面**といい、support($\mathbf{y}$) と書く。極大元 $\mathbf{y}$ の支持面 F は唯一に定まる。

賃金率空間の標準単体を Δ_w、価格空間の標準単体を Δ_p と書くことにしよう。極大元 $\mathbf{y}$ の認容な賃金率・価格体系の集合 adm($\mathbf{y}$) に戻ろう。これを賃金率空間に射影したものと Δ_w との共通部分 adm($\mathbf{y}$) $\cap \Delta_w$ は、競争モード CM($\mathbf{y}$) をもつ賃金率体系の集合であり、賃金率 Δ のモード分解 $\mathcal{D}$ の元に他ならない。これを $\mathbf{y}$ の賃金率極集合といい、wPol($\mathbf{y}$) と表す。極大元 $\mathbf{z}$ が $\mathbf{y}$ と同じ $\mathcal{P}$ の支持面をもつとき、$\mathbf{z}$ も同じ賃金率 Δ のモード分解の元を表す。賃金率 Δ のモード分割の同じ競争モードを定義する元であるから、これは当然である。このことから、生産可能集合の極大境界の各面の集合すなわち極大境界のモード分割 $\mathcal{E}$ から、賃金率 Δ のモード分割 $\mathcal{D}$ への写像 μ が定義される。

写像 μ の像である賃金率 Δ のモード分割 $\mathcal{D}$ の元はすべて分担的である。逆に、賃金率 Δ のモード分割 $\mathcal{D}$ の元で分担的なもの G をひとつ取ろう。G は、0 次元の多角形で一点 $\mathbf{w}$ のみからなるか、1 次元以上の多角形である。 1 次元以上の場合には、G の相対内点の一点 $\mathbf{w}$ を取り直すことにしよう。元 G に対して $\mathbf{w}$ と対応の価格ベクトル $\mathbf{p}$ を取るとき、$\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ の競争モード $CM(\mathbf{w},\mathbf{p})$ に随伴する生産可能集合は生産可能集合 $\mathcal{P}(\Xi,\mathbf{q})$ の極大元からなるある面 F を形成する。この面は、G の相対内点 $\mathbf{w}$ の取り方に依存しない。なぜなら、それらは極大境界のモード分解 E の元で同じ競争モードをもつからである。このことにより、賃金率 Δ のモード分割のうち、分担的なものから生産可能集合の極大境界のモード分解 $\mathcal{E}$ の元への写像 λ が存在し、写像 μ の逆写像となる。いま、賃金率 Δ のモード分割のうち分担的なものの集合を $\mathcal{D}^S$ と書くことにすれば、 $\mathcal{D}^S$ から $\mathcal{E}$ の上への一対一の対応が λ と μ によって定義される

5.2 極大境界と価格極集合

次で定義される二つの凸錐 $Cv(\Xi)$ と $Ch(\Xi)$ を考えよう。まず、$Cv(\Xi)$ を以下で定義する。

$$Cv(\Xi) = \{(\mathbf{y},\ \mathbf{q})\} \mid \text{ある非負の}\ \mathbf{s}\ \text{と}\ \mathbf{t}\ \text{について}\ (\mathbf{y}, -\mathbf{q}) = (\mathbf{s},\mathbf{t}) \begin{pmatrix} A & -I \\ O & -E \end{pmatrix} \} \qquad (26)$$

これは、有限個のベクトルの非負結合として凸錐である。ただし、$Cv(\Xi)$ は N+M 次元の実数空間内にあり、全空間と一致する可能性もある。

次に $Ch(\Xi)$ を

$$Ch(\Xi) = \{(\mathbf{p},\ \mathbf{w}) \mid \begin{pmatrix} A & -I \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}\} \tag{27}$$

と定義する。これも、すべて原点を通る超半空間の共通集合として凸錐である。ただし、これはN+M次元の実数空間内にあり、原点 $\mathbf{0}$ に退化している可能性がある。

凸錐 $Cv(\Xi)$ と $Ch(\Xi)$ が属する空間は同じ次元 $M+N$ をもつが、$Cv(\Xi)$ は横ベクトル、$Ch(\Xi)$ は縦ベクトルであり、両者は互いに双対関係にあるふたつの異なる空間の部分集合である。

さて、$Cv(\Xi)$ の $\mathbf{0}$ でない境界上の一点をとり、$(\mathbf{y},\ -\mathbf{q})$ としよう。この点を通り、集合 $Cv(\Xi)$ の支持超平面となるベクトル $(\mathbf{p},\ \mathbf{w})$ が存在する。このようなベクトルの組は方向の違うものが複数存在するかもしれない。$(\mathbf{y},\ -\mathbf{q})$ が境界にあることより、等式

$$\langle \mathbf{y}\ ,\ \mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{q}\ ,\ \mathbf{w}\rangle \tag{28}$$

を満たす。

錐 $Cv(\Xi)$ の第2成分を $-\mathbf{q}$ に制限したものは、労働力 $\mathbf{q}$ に対応する生産可能集合 $\mathcal{P}$ に他ならない[14]。このとき、ベクトル $\mathbf{p}$ が点 $\mathbf{y}$ を相対内部に含む生産可能集合 $\mathcal{P}$ の面 (ただし、面が0次元の頂点である場合には頂点そのもの) の支持超平面となる条件が式 (28) である。言い換えれば、

$$\langle \mathbf{z}\,,\,\mathbf{p}\rangle \leq \langle \mathbf{q}\,,\,\mathbf{w}\rangle. \tag{29}$$

は、点 $\mathbf{y}$ を通る生産可能集合 $\mathcal{P}$ の妥当な不等式となっている。これより、ベクトル $\mathbf{p}$ により、式 (28) は生産可能集合 $\mathcal{P}$ のある面 $F = \mathrm{support}(\mathbf{y})$ を定義する。場合を二つに分ける。

まず、面 F の次元が1以上の場合であるとしよう。点 $\mathbf{y}$ は面 F の相対内部にある。面 F をベクトル $-\mathbf{y}$ だけ平行移動すると、これは、空間 $\mathbb{R}^N$ において原点 $\mathbf{0}$ を通るベクトル部分空間 S の原点の近傍を包む。部分空間 F に直交するベクトルの全体は、$\mathrm{adm}(\mathbf{y})$ と同一視できる。これらは互いに相補的な関係にあるから、

$$\dim(F) + \dim(\mathrm{adm}(\mathbf{y})) = N$$

となる。この関係は、面 F の次元が0で、支持面がただ1点のみの場合にもなりたつ。

$\mathrm{adm}(\mathbf{y})$ と価格面 Δ との共通集合は、価格 Δ のモード分割のひとつの面をなす。これを G とすると、1次元だけ次数が下がって

$$\dim(F) + \dim(G) = N - 1$$

となる。これより、以下の定理を得る。

定理 5.1 (双対関係定理)
ベクトル $\mathbf{y}$ を生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大境界点とする。ベクトル $\mathbf{y}$ を相対内点とする $\mathcal{P}$ の面を $F = \mathrm{support}(\mathbf{y})$、面 F に直交する価格ベクトルの集合を E とするとき、E を基準化したもの G は価格面 Δ のモード分割のひとつの細胞となり、等式

$$\dim(F) + \dim(G) = N - 1 \tag{30}$$

がなりたつ。

[14] $Cv(\Xi) \cap \{\mathbf{t} \mid \mathbf{t} = -\mathbf{q}\}$ 平行移動して、空間 $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ の集合と考えればよい。

定理 5.1 は生産可能集合の極大境界のモード分割と対応する価格 Δ のモード分割との双対関係を与えている。価格 Δ のモード分割と賃金率 Δ のモード分割には、密接な関係がある。不等式 27 を満たし、等式 28 を満たすベクトルの組 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{w}$ とき、$\mathbf{p}$ は賃金率体系が $\mathbf{w}$ と与えられたときの世界最小価格であるから、それぞれを相対内点 (あるいは頂点) とするモード分割の面 G と H は、互いに対応している。命題 4.6 から、対応する面 G と H の内部で $\mathbf{p}$ と $\mathbf{w}$ とは一対一に対応している。したがって、

$$\dim(H) = \dim(G),\ \dim(F) + \dim(H) = N - 1$$

が成立する。

これらの結果を含めて、これまでの考察を定理としてまとめておこう。

定理 5.2 (総合双対関係定理)
生産可能集合 $\mathcal{P}$ の極大境界の任意の点をひとつ取り、$\mathbf{y}$ とする。この点には、賃金率ベクトル $\mathbf{w}$ と価格ベクトル $\mathbf{p}$ の組が少なくともひとつ存在して、価格ベクトル $\mathbf{p}$ は賃金率ベクトル $\mathbf{w}$ に関する世界最小価格であり、点 $\mathbf{y}$ の支持面を F、賃金率 Δ のモード分割の細胞でベクトル $\mathbf{w}$ を相対内部に含むものを H とするとき、

$$\dim(F) + \dim(H) = N - 1 \tag{31}$$

がなりたつ。

5.3 双対対応からの帰結

まず、定理 5.1 および定理 5.2 を簡単な場合に、例として示そう。

例 5.1 (3 国 3 財の場合)
3 国 *3* 財、すなわち *M=3*、*N=3* の場合に、*3* つのモード分割の対応するものの次元関係をまとめると、以下の表ができる。

生産可能集合		賃金率 Δ・価格 Δ の細胞分割
頂点	$\longleftrightarrow$	ファセット (細胞)
線分	$\longleftrightarrow$	線分
ファセット (細胞)	$\longleftrightarrow$	頂点

例 5.2 (2 国 3 財の場合)
2 国 *3* 財、すなわち *M=2*、*N=3* の場合、賃金率 Δ は *1* 次元の線分であり、そのモード分割は *0* 次元か *1* 次元でしかありえない。したがって、生産可能集合の極大境界のモード分割には、*0* 次元の面すなわち頂点は現れない。

そこで、*3* つのモード分割の対応するものの次元関係をまとめると、以下の表ができる。

生産可能集合		賃金率 Δ・価格 Δ の細胞分割
2 次元面	$\longleftrightarrow$	線分
線分	$\longleftrightarrow$	頂点頂点は極大境界内に現れない。

このとき、価格 Δ のモード分割はどのようになっているであろうか。賃金率 Δ のモード分割に対応するものは、その面と同じ次元を持たなければならない。したがって、価格 Δ は 2 次元の 3 角形であるが、分担的な価格は一次元の線分をいつくか連結したものとなっているはずである。

例 5.3 (1 国 N 財の場合)
世界に *1* 国しか存在しない場合、賃金率 Δ はただ一点に退化する。その次元は *0* である。定理 *5.2* から、生産可能集合の極大境界は、ただひとつの面からなり、その次元は *N-1* となる。すなわち、極大境界はただひとつのファセットであり、それに直交する価格は *(*係数倍を除いて*)* ただひとつしかない。これは、最小価格定理が保証する状況に他ならない。

定理 5.2 は、第 2 節の最小価格定理を出発点としている。その上に延々と導出を重ねてきたが、これまでやってきたことは、1 国の場合には、結局、最小価格定理そのものであり、何の展開もないことになる。

例 5.4 (M 国 N 財で $M \ll N$ の場合)
定理 *5.2* は、M と N が大きい場合にも適用できる。定理から、一般に

生産可能集合		賃金率 Δ・価格 Δ の細胞分割
d-面	$\longleftrightarrow$	$(N-d-1)$-面

という対応関係がある。とくに、$M \ll N$ の場合、賃金率 Δ に注目すると $N-d-1 \leq M-1$ という制限がつく。これは

$$N - M \leq d$$

を意味する。したがって、生産可能集合の極大境界のモード分割には *N-M* 次元より小さな次元の面は現れない。

世界には 200 近い国・地域が存在するが、財の数は商品分類段階で 1 万近くあり、細かく分けると 1 千万から 1 億という大きさと考えられる。N=10,000,000 のとき、W=100 とすると、価格 Δ の中で価格の集合は、1 千万次元の中の 100 次元しかなく、分担的な価格の集合は非常に「薄い」集合となっているはずである。
財の数 N より国の数が大きい場合についても、考えておこう。

例 5.5 (4 国 3 財の場合)
この場合、賃金率ベクトルの自由度より、価格の自由度が小さい。そこで、賃金率 Δ における分担的な賃金率ベクトルの集合は、*3* 次元単体の中の *2* 次元の面を連結したものとなっている。

生産可能集合		賃金率 Δ・価格 Δ の細胞分割
頂点	$\longleftrightarrow$	面
線分	$\longleftrightarrow$	線分
ファセット (細胞)	$\longleftrightarrow$	頂点

6 貿易の利益と不利益

貿易は関係国にとってどのような利益があり、また不利益があるか。これは貿易理論が始まって以来一貫した主題である。従来は、貿易の利益のみが強調されてきた。しかし、それを競争均衡が成立した状況のみにおいて考えることはできない。貿易摩擦は均衡が成立する以前の過渡的な状況におこる問題であるからである。貿易の利益・不利益についても、どのような場合にそれらが生まれるか。それはどのような関係者にとって言えることなのか。これらのことをきちんと分析する必要がある。
従来の分析では、関係国全体にとっての利益、社会全体にとっての利益という観点に限られている。しかし、摩擦は社会のある立場のものと他の立場のものとの利害が激しく対立することから起こるものであり、全体の視点のみからは十分な分析はできない。リカード理論の新しい構成法は、雇用されている労働者利益と貿易により事業縮小と失業を余儀なくされる企業者・労働者とのあいだに利益の相反があることをあきらかにする。

6.1　全体の利益

貿易の利益は、通常、貿易をしない場合より、貿易をする場合の方が世界全体として生産量が増加し、各国の消費ないし投資できる財の量が多くなるという形で定式化されている。この定式化は、貿易のない場合とある場合とで、特定の構成比をもつ極大の生産量を求めることを必要とする。これも制約条件の異なる二つの均衡のあいだの比較である。その考察は容易であるが[15]、ここではより一般の場合についてもうすこし詳細な分析を試みる。

比較の対象となるのは貿易の開始前と開始後の二つの状況である。しかし、従来の分析と違い、それぞれの状況が極大生産量を達成している（均衡状態にある）ことは仮定しない。貿易をせずに閉じた経済を運営してきた経済が貿易を開始することにより、どのような状況に移りうるかをまず検討する。その際、世界全体の消費・投資総量は変わらないとする。もちろん、貿易の開始により、新しい発展がありうるが、リカード理論の枠内でその力学を十分に分析することはできない。理論は、そのような発展を考察する用具ではなく、そのような発展の場を記述するというべきであろう。

以下では簡単のために、純生産物が有用に利用される総量を「消費総量」という言葉で一括するが、そこにはつねに社会に有用な投資が含まれていることに注意してほしい。投資の結果、生産規模が成長するなどの効果については、本節では考察しない。

貿易の開始前と後で利潤率は変わらないとしよう。これは強い仮定でありつねに成立するとは限らないが、当面の考察においてはこの強い仮定のもとに分析する。この仮定により、価格関係を調べるときは、利潤分をも上乗せした係数行列を考えるとにより、経済ではあたかも利潤率 0 の価格付けが行われているかのように議論することができる。

世界には M 個の国があり、M より大きいか等しい種類 N の財があると仮定する。各国は閉鎖経済としてすべての財を生産しているとする。このとき、弱い存在定理 3.1 から、ある賃金率の体系 $\mathbf{w} = (w^1, w^2, \ldots, w^M)$ が存在して、弱い意味で分担的な特化パタンをもつ。これは、ある技術系 γ を取るとき、賃金率体系 $\mathbf{w}$ に対応する γ の生産価格 $\mathbf{p}$ を取るとき、γ に属する技術は弱い意味で競争的であり、かつ任意の国は少なくともひとつ弱い意味で競争的な技術をもことを意味する。このような賃金率および生産価格をひとつ取ろう。各国が競争的でない財の生産をすこし減らし、代わりに競争的な財の生産を増強して輸出するとしよう。国際貿易における交換比率は価格 $\mathbf{p}$ によるものとする。

このとき、次の定理が成り立つ。

定理 6.1 (生産量調節の可能性)
ある賃金率の体系 $\mathbf{w}$ において弱い意味で分担的な特化パタンが得られるとする。このとき、$\mathbf{w}$ に対応する生産価格で貿易を行うことにより、次の諸条件を満たす生産が可能である。

1. 世界全体では純生産の総量＝総消費量は変わらない。
2. 各国は貿易開始前と同じ量の商品を消費する。
3. すべての国はすべての財の生産規模は正か *0* であり、非負とならない。
4. どの国の輸出額もその国の輸入額に等しい。
5. 各国の総労働量は、貿易開始前より小さいか等しい。

次の補助定理をもちいる。

[15] 制約条件が少ない方がより大きな極大解をもつのはほとんど当然である。

補助定理 6.2 (洗濯干しの定理)
行列 B が H 行 N 列の行列で、その任意の行ベクトル b^h はたかだかひとつの正の要素をもち、かつ各列ベクトルは少なくともひとつ正の要素をもつとする。もし、正の H 次の列ベクトル $\mathbf{p}$ があって、 $B\mathbf{p} = \mathbf{0}$ あるいは同じことで任意の h につき $\langle \mathbf{b}^h, \mathbf{p} \rangle = 0$ がなりたつとき、あるすべては 0 でない非負の実数 x_h が存在して、

$$\sum_{h=1}^{H} x_h b^h = 0 \tag{32}$$

となる。

証明
概略のみを示す。行列 B が正方行列のとき、これは単純生産型の行列である。行列 A を B の非対角要素の符号を反対にしたものとすれば、非負行列 A に関し、分解可能かいなかが定義される。もし、A が分解不可能 *(あるいは既約)* ならば正のベクトル $\mathbf{x} = (x_h)$ が存在して、$\mathbf{x}B = \mathbf{0}$ となる。これは書き直せば、式 *(32)* なる。行列 A が分解可能のとき、行列 A が分解不可能となる最小部分をとれば、定理が成立する。行列 B が列数以上の行をもつとき、各列に正の要素があるよう行列 B の行を抜き出して正方行列を作れば、その行列について定理がなりつたつ。

定理 6.1 の証明は、補助定理をもちいて次のように与えられる。

[パワーポイント資料　図 6 より少ない労働投入による世界同量生産]

図 6: 貿易により各国がより少ない労働投入で同量の財を消費する

証明
貿易前における各国の生産量を $\mathbf{y}(i)$ とする。ベクトル $\mathbf{y}(i)$ は第 i 国の労働力 q_i を目一杯使っていると仮定して一般性を失わない。賃金率の体系 $\mathbf{w}$ において弱い意味で分担的な特化パタンが得られるとしよう。対応する生産価格を $\mathbf{p}$ とする。このとき、第 i 国において、少なくともひとつ競争的な技術 τ が存在する。技術 τ は、第 j 財を純生産しているとする。第 i 国の生産を技術ごとの生産水準によって表してみよう。その座標は、非競争的な技術によるものと競争的な技術によるものとに分割される。このとき、もし $\mathbf{y}(i)$ が非競争的な技術による生産を含むとすれば、$q_i\, w^i > \langle \mathbf{y}(i), \mathbf{p} \rangle$。第 i 国の生産可能集合を $\mathcal{P}(i)$ とし、ベクトル $\mathbf{y}(i)$ を通る超平面 $\langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{y}(i), \mathbf{p} \rangle$ を考えよう。

この超平面と任意の競争的な技術 τ の軸との交点を s とすれば、$0 < s < q_i$。実際、技術 τ は $\mathbf{w},\ \mathbf{p}$ に関し競争的という条件から、 $w^i = \langle \mathbf{a}^{\tau}, \mathbf{p} \rangle$。これより、$q_i\, w^i > \langle \mathbf{y}(i), \mathbf{p} \rangle =$

$\langle s\mathbf{a}^{\tau}, \mathbf{p}\rangle = s\ w^i$。よって、$s < q_i$。また、価格ベクトル $\mathbf{p}$ は正で、$\mathbf{y}(i)$ は $\mathbf{0}$ ベクトルではないから、$s > 0$。ここで $\mathbf{u}(i) = s\ \mathbf{a}^{\tau}$ とおき、$\mathbf{b}(i) = \mathbf{u}(i) - \mathbf{y}(i)$ と定義しよう。ベクトル $\mathbf{y}(i)$ は第 i 国の閉鎖経済における生産ベクトルだから非負。したがって、$\mathbf{b}(i)$ は第 j 財を除いて *0* または負。この $\mathbf{b}(i)$ は超平面 $< y, p >=< y(i), p >$ 上に取られているから、$\langle \mathbf{b}(i), \mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{z}(i) - \mathbf{y}(i),\ \mathbf{p}\rangle = 0.$

ベクトル $\mathbf{b}(i)$ を縦に並べてできる行列を B とすれば、補助定理からすべては *0* でない非負の実数 x_i が存在して $\sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{b}(i) = 0$ となる。そこで改めて $\mathbf{x}(i) = x_i\ \mathbf{b}(i)$ と置き直そうおそう。すべての i につき $\mathbf{y}(i) +\ \rho\ \mathbf{x}(i) \in \mathcal{P}(i)$ となる最大の正の数 ρ が存在する。このとき、$\mathbf{z}(i) = \mathbf{y}(i) +\ \rho\ \mathbf{x}(i)$ とおくと、

$$\mathbf{z}(i) \in \mathcal{P}(i) \text{ かつ} \sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}(i) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{y}(i).$$

変更された生産量 $\mathbf{z}(i)$ は生産可能集合 $\mathcal{P}(i)$ に入っているから、各技術による生産水準は非負であり、かつもし $x_i > 0$ なら図 *6* よりあきらかに $\mathbf{z}(i)$ の労働使用量は q_i より小さい。**証明終わり**

定理 6.1 は弱い意味での分担的特化パタンの存在を仮定しているから、各国の総労働量が増えないだけでなく、実際に減少するかどうかは分からない。極端な場合、すべての国のすべての技術が生産的であることもあるから、貿易開始により労働量は一般には「増えない」としかいえない。しかし、もしふたつの国の生産価格が比例的でないなどを仮定すれば、少なくともある国ついては貿易により必要労働量を減少させることができる。

さらに分担的特化パタンの強い存在定理を仮定すれば、$N \geq M$ 場合に限られるが、一般の場合に、消費・投資総量を維持しながら、すべての国で必要労働量をじっさいに減少させることも可能である。

ひとつの国に注目するとき、(投資量を含む) その国の総消費量が一定でそのために必要な総労働量が減少しているとすれば、国全体あるいは社会全体としてみれば、貿易開始前に比べて貿易後の事態は改善されたといわなければならない。これが全体としての貿易の利益である。

定理 6.1 の結果については、ひとつ注意すべきことがある。定理の条件には、全世界で統一された価格が存在することは仮定されていない。国際貿易において取引される財についてのみ、世界最小価格が用いられている。この価格が国内でも成立し、負の利潤率をもたないもののみが生産可能とすると、すべてが競争的な技術により生産されなければならないが、定理 6.1 の証明から分かるように、部分的には従来の技術に基づく生産がなされていなければならない。したがって、国内では貿易価格とそれとはことなる国内価格とが２重に存在する状態となっている。これは一物一価の法則により、これらが早急に均一化される可能性があるが、輸入財のみが特別なルートによって流れ、２重価格のまま数量調節が行われる可能性もある。貿易の利益がどのように実現され、どのように配分されるかはこの定理の考察範囲ではない。

定理 4.3 から、統一された世界価格とそこにおいて競争的な技術のみによって、各国が現在以上の純生産量を得ることは可能であることがわかる。

6.2　関係者の視点

前項 6.1 では国全体あるいは社会全体としての貿易の利益を考察した。しかし、個別の経済主体を考えると、全体としての利益はかならずしも歓迎すべき状態ではない。

前項 6.1 では、同じ消費量を得るのに必要な総労働量が減少した。これは労働という観点からみると、雇用量の減少である。貿易により、新たな販路が開け、新しい産業が生まれて、別の企業に職を得ることができればかまわないが、それができないときには、雇用の減少は失業を生み出す。同様に、規模が縮小される産業に従事している経営者・資本家にとって、利潤率が一定で規模が縮小することは利潤の縮小を意味し、そのこと自体は関係すべきことではない。

では、全体の利益はどのように享受されているのであろうか。雇用され続けている労働者にとって、貿易の開始は同一賃金率において、ある種の商品をより安価に変える機会となる。労働者はいくつかの財をより安い対価により購入できる機会が増える。したがって、おなじ時間数働いて一定の賃金をもらっているとすれば、雇用されている労働者にとって貿易は消費総量を増大させるものとなる。同様のことは、生産水準が上がった資本家や不変の資本家についてもいえる。貿易は、このように同じ階級・階層に対し、異なる意義をもたらす。

貿易の開始にともないある国のある産業の生産が縮小するかもしれないという可能性がある。そのとき、失業する労働者や生産縮小を余儀なくされる資本家・経営者にとっては、貿易開始はすくなくとも短期的には利益とはいえない。しかし、働き続ける労働者にとっては、同一労働・同一賃金のもとでより安価な製品を購入できるという意味で実質賃金が上昇する。このような貿易の利益は、分担的であろうとなかろうと、すべての賃金率体系において成立する。

定理 6.3 (貿易による実質賃金率の上昇)
貿易前の m 国の賃金単位の価格を $\mathbf{p}(m)$ とする。貿易開始後に世界各国の賃金率体系が国際通貨単位で測って $\mathbf{w} = (w^1, w^2, \ldots, w^m, \ldots, w^M)$、対応の世界生産価格が $\mathbf{p}$ となったとする。このとき、

$$\mathbf{p}(m) \geq \frac{1}{w^m}\,\mathbf{p}. \tag{33}$$

とくに、m 国の技術系が分解不可能で、m 国の技術がすべての産業において競争的でないがきり、不等号は強い意味で成立する。ただし、賃金単位の価格とは、労働 *1* 単位当たりの賃金が *1* となるよう規格化した価格、技術系が分解不可能とは対応の生産係数行列の対角要素を *0* とし、すべての非対角要素の符号を逆転させてできる行列 $A^\dagger$ とするとき、$(\mathbf{I} + A^\dagger)^{M-1}$ が正行列となることをいう。

証明
生産価格 p は賃金率体系 $\mathbf{w} = (w^1, w^2, \ldots, w^m, \ldots, w^M)$ における世界最小価格であるから

$$w^m\,\mathbf{p}(m) \geq \mathbf{p}.$$

これより、不等式 (6.2) を得る。強い不等式は、ひとつの財について強い不等式がなりたつとき、分解不能な行列によって定義される価格については常に成立する。
証明終わり

定理 は、任意の賃金率体系において成立するが、世界価格において競争的な技術をもてない国は、長期安定的にはいかなる生産も行なうことはできない。このとき、このような賃金率における貿易は、資産保有者や貨幣所有者にとってよくても、経営者を含めて働くものにとっては容認できない状況といわなければならない。このように貿易の利益・不利益は、おかれた立場によりまったく異なる意義をもつ。

従来、このような利害の対立が主題とされなかったのは、考察される状況が「均衡状態」に限られ、そこへの移行が急速に行なわれると前提されてきたからである。しかし、なん

ども指摘しているように、貿易摩擦は、均衡状態ではなく、移行過程における問題なのである。

7　価格調節と生産調節

リカードの貿易理論は、狭い範囲のモデルに基づいてさまざまに解釈されてきた。前節で考察した賃金率 Δ なし価格 Δ と生産面との双対性 (相互に極となっている関係) は、J. S. ミル以来の論争に新しい理解をもたらす。

J.S. ミルは、リカードの貿易理論を継承して考察したが、リカードの事例をより詳しく考察して、主として需要の構成が価格を決定するとかんがえた。20 世紀に入り Graham (1948) は 2 国 2 財の考察がそのまま多数国多数財に拡大されないことを指摘し、3 財以上の場合について数値例を用いて需要構成が変化してもかならずしも価格が変化するものでないことを指摘した。この延長上での分析や考察は、マッケンジー、ジョーンズを経て、近年では三邊信夫や池間誠にいたるまで続いている。池間誠 (1993) は、Graham の考察が可能な価格集合の中での「きわめて特殊な点」の選択に依存していると指摘したが、三邊信夫 (2001) は、生産可能集合の広いファセットにおいて「財価格比率および各国の賃金構造は変化せず存外、安定的であることもある」と反論している。以下に示すように、Graham と三邊信夫の考察が基本的に正しいことが定理 5.1 および定理 5.2 から、多数国多数財で中間財と技術選択を含む一般の場合において証明される。

新しい構成されたリカード貿易理論は、世界各国の賃金率に大きな格差が生まれる理由と機構とを説明している。この比率の決定において、需要構成は副次的な役割しか果たさない。少なくとも、生産可能集合の極大境界のファセットを変えない程度の需要の変化は、賃金率・価格体系を一定にたもつ。簡単にいえば、各国の賃金率の高低を決めるのは技術の格差である。賃金率の低い国が実質賃金を引き上げようとすれば、できることは技術水準を高め、生産性をあげることしかない。これはリカード貿易理論の新構成から得られる大きな政策的メッセージである。

7.1　真の対立軸はなにか

通常、争点は、国際価格は供給条件のみによって決まるのか (リカードの立場)、需要条件を考慮しなければ決まらないのか (J.S. ミルの立場) という問題であると捕らえられている。これは論争となっている事態の理解が十分でないために生まれた意見の対立であり、正しく問題が立てられているとはいえない。真の問題は、価格が供給のみできまるのか、需要によって初めて決まるかではない。もし、このように問題が立てられるならば、どちらの主張も正しいとはいえない。しかし、そのことは、ミル以来の対立・論争が無意味であったとか、重要でなかったとを意味するものでもない。ただしい形で定式化されていなかったとはいえ、リカードを代表する古典経済学と新古典派の経済学の間にある、現在まで引き続く経済観の対立が、国際貿易という場面においてより先鋭な形で展開されているからである。

まず、本論文で考察してきたことをまとめてみよう。定理 5.1 および定理 5.2 をもちいて、次のことが確認される。

国の数を M、財の数を N としよう。最終需要 $\mathbf{y}$ が生産可能集合の極大境界にあるとき、それがどの面に含まれるかにはさまざまな可能性がある。極大元 $\mathbf{y}$ が面 F の相対内点にあり、$\mathbf{y}$ の認容な賃金率・価格体系の全体が賃金率 Δ および価格 Δ においてつくる集合を

面 H および面 G とすると、定理 5.1 および定理 5.2 から

$$\dim(H) = \dim(G) = N - 1 - \dim(F) \tag{34}$$

が成り立つ。また、構成から面 H は $M-1$ 次元以下、面 G と面 F とは $N-1$ 次元以下でしかありえない。

面 F が極大境界の最大次元の面すなわちファセットであるとき、その次元は $N-1$ である。したがって、対応の H も G も 0 次元でしかありえない。これは、H と G とが一点のみからなる集合であることを意味する。言い換えると、元 $\mathbf{y}$ の認容な賃金率・価格体系は定数倍を同一視すると一義的である。

生産可能集合が多面体であり、極大境界がその境界の一部であることから、以下のことが言える。

- 生産可能集合の極大境界のモード分割においてファセットとなる (財の数-1) 次の面のそれぞれの内部の各点には、賃金率 Δ・価格 Δ のただ一点が対応している。
- 極大境界のファセットは有限個しかなく、それらに対応する賃金率・価格体系も同数しかない。
- ファセットの内点以外の極大境界は、$N-2$ 次以下の面の集合であり、その全部の測度は 0 である。

このことを前提として、過去の議論を整理しおしてみよう。

まず、これまで議論されてきたのが、生産可能集合の極大元 $\mathbf{y}$ とその認容な賃金率・価格体系 $\mathbf{w},\ \mathbf{p}$ との組に関する考察であることに注意しよう。この賃金率・価格体系において競争的な技術のみにより、純生産 $\mathbf{y}$ が可能になり、すべての国で完全雇用が成立する[16]。ここでは、利潤率 0 と想定しているので、世界の最終需要は、労働者が自己の賃金で購入する財の総計である。これがどのように与えられようと、それが $\mathbf{y}$ に等しければ、安定した循環・経済の再生産が可能となる。需要関数・効用関数など用いて定義される均衡も、結局は、極大元 $\mathbf{y}$ とその認容な賃金率・価格体系 $\mathbf{w},\ \mathbf{p}$ との組に帰着する。

さて、世界全体で、所得をどの財に支出するかという比率が一定であるとしよう。言い換えれば、あるベクトル $\mathbf{y}$ があって、需要は $\eta\,\mathbf{y}$ という形をしているとしよう。ただし、η はある正の実数とする。ベクトル $\mathbf{y}$ は Δ 上にあると仮定して一般性を失わない。各国の労働力量を所与とすると、生産可能集合の極大境界が定まる。これを原点から生産面 Δ に投影したものが、生産面のモード分割である。この分割において特定の需要構成 $\mathbf{y}$ がどこに位置するか、先験的に決めることはできない。あらゆる可能性があるが、生産面において考察するとき、所与の需要構成はほとんど確実にあるファセットの内部にあるといってよい[17]。このとき、対応する賃金率・価格体系は比例的なものを同一視すればただひとつだけ存在する。さらに、最終需要がすこし変化しても、それが同じファセットにありつづけるかぎり、認容な賃金率・価格体系は同一のものにとどまる。

グレアムがミルを批判しようとして行ったのは、まさにこのことであった。かれは、各国の労働力の賦存量を特定し、需要構成を与えて、それが所属するファセットを求め、さらに対応する価格体系を求めている。グレアムは、それが全体としてどのような操作であるか明らかにできなかったが、需要構成がひとつのファセットの内点である場合を意図せずして選択している。

---

[16]言い換えれば、生産規模ベクトル $\mathbf{t}$ が存在して、$\mathbf{y} = \mathbf{t}\,A,\ \mathbf{t}\,I = \mathbf{q}$ を満たす。

[17]確率測度を厳密に定義してないが、通常の測度を導入するかぎり、ファセット内部の点全体は測度 1 であり、それ以外の次元の低い面に入っている確率は 0 である。

これは供給条件のみによって価格が決定されることを意味しない。実際、需要構成が大きく変わり、所属するファセットが替われば、価格は変化する。しかし、需要と供給が一致するように、価格が決まるということもできない。なぜなら、おなじファセットの内部では価格は一定で、純生産量が変化していなければならないからである。

このように分析してみると、いままで隠されてきた真の対立軸が見えてくる。古典派と新古典派の中間に立つ J.S. ミルは、価格調節の枠組みで考察を進め、需要条件が価格を決定するとかんがえた。しかし、実際に、そこに存在していたのは、価格調節の可能な状況ではなく、一定の価格の下における生産調節でしか解決できない状況であった。すなわち、見るべき対立は、価格調節と生産調節とにあったのである。

単純な生産技術のをもつ一国経済では、最小価格定理が成立し、利潤率を一定とすると価格は一義に定まる。このような経済には、価格一定のもとにおける生産調節という接近法が本来必要であるが、そのような問題設定が経済学に成立するには、ケインズ以降の経済学を待たねばならなかった。このような問題意識の欠落のため、ひとびとは長いあいだ、価格による調節のみを考えてきた。古典派には、正常価格という概念があったが、リカードといえども、おおむねは価格が小さく上下することにより、生産量の調節が行われると考えている。そのような考えをうけて、価格変数の需要関数・供給関数という概念が成立すると同時に需要供給均衡という枠組みが成立し、新古典派の経済学の基本形が形成された。多数国・多数財のリカード・モデルに隠されていたのは、価格調節がほとんどいたるところ無効な状況であった。

財の数 N が国の数 M に等しいかより大きいとき、定理 3.6 がしめすように、一般的には賃金率 Δ のモード分割の中に強い分担的領域つまり分担的ファセットが (場合により、複数) 存在する。しかし、これは生産可能集合面でみると、$N-M$ 次元の面に対応している。したがって、$N=M$ のときに、生産可能集合では、極大境界のモード分割の一つの頂点に相当するに過ぎない。価格の動く範囲がたとえ大きくとも、それは特殊な構成をもつ一点にすぎず、強い分担的領域の広さは、生産可能集合において、頂点が突出していることを示すにすぎない。

7.2 賃金率格差をきめる機構

すでに述べられていることを、各国の賃金率になぜ格差が生ずるのかという視点から再説しておこう。第**??**節の最初に論じたように、貿易理論は、たんに貿易の成立・貿易の方向・貿易の利益を説明するだけのものではない。それは同時に世界各国の間に賃金率の大きな格差がなぜ存在するのかを解明・説明するものでなければならない。すなわち、それは国際価値論でもなければならない。新しく構成されたリカード理論は、この条件を満たしている。これは、マルクスやスラッファが目指して達成できなかった構想を実現するものであり、同時に Emanuel(1969) らの国際不等価交換論の誤りを是正するものでもある。

すでに説明したように、生産可能集合の極大境界において世界最小価格が厳密に成立し、各国に完全雇用が成立するような賃金率・価格体系は、一般にひとつしかない。ここに「一般に」というのは、財の種類を N とするとき、極大境界におけるほとんどすべての点 (つまり測度 0 を除くすべての点) は、ある N-1 次元のファセットの (相対) 内部に含まれている。ここにおける賃金率・価格体系は、このファセットに直交する価格ベクトル $\mathbf{p}$ と対応の賃金率ベクトル $\mathbf{w}$ であり、定理 4.3 で存在を保証されるものである。定理 5.2 によれば、生産可能集合の極大境界のファセットに対応する価格ベクトルおよび賃金率ベクトルと価格 Δ および賃金率 Δ の共通集合は 0 次元、すなわちただ 1 点である。これは、相対賃金率が一義に決められるということである。

もちろん、価格ベクトル $\mathbf{p}$ と賃金率ベクトル $\mathbf{w}$ とは最終需要のあり方に依存する。た

だし、その依存の仕方は、要素代替を重視する新古典派の定式によるものとはその性質が大きく違っている。最終需要がおなじファセットにとどまるかぎり、認容な賃金率・価格体系は唯一つ存在する。需要の小さな変化は、賃金率・価格体系を変化させることがない。したがって、前項で説明したように、需要の小さな変化には数量調節で対応する以外にない。もちろん、ファセットを超える需要の変化は、価格ベクトルも賃金率ベクトルも変化させる。しかし、その範囲は賃金率 Δ および価格 Δ の分担的な集合内の (一般には有限個の) 点に限られている。

通常観察されるように、国の数に比べて、財の種類が大幅に大きいならば、許容される価格の集合は、5.3 項の例 5.4 に例示されたように、高い次元の空間の中の非常に「薄い」集合となる。新古典派の経済学では、均衡価格は、需要の変化に応じて、通常、財空間とおなじ自由度 (あるいは比例的なものとを同一視すれば、余次元 1 の自由度) をもつと考えられているが、リカード理論の文脈では、そのようなことは成立しない。

7.3 残された課題

大きな対立の影に隠れているもうひとつの問題があると思われる。それは、均衡点に限って考察するという習慣である。上に見るように、均衡点を考えるということは、分担的価格と対応の効率点とを同時的に考察するということである。それがいかに厳しい条件の状況であるかについて反省する必要があろう。

価格でいえば、それがかならずしも厳密に分担的でなくても、市場価格として役割を果たしうるかもしれない。製造原価が大きく違わないなら、要求利潤の水準をすこし譲歩すれば、厳密に競争的でない技術で操業することもありえる。生産が反対に極大点飲みで行われると仮定する必要もない。特定の賃金率体系・価格体系のもとで、どのような経済過程が進行するのか。こうした考察・分析も重要であろう。現に第 6 節では、一元化された価格と競争的な技術のみによる生産でなく、二重価格と非競争的な技術も並存する状態を取り上げて、貿易の利益と不利益とを考察した。本節で考察した価格調節・数量調節も、いわゆる均衡で考えると、限定的すぎるかもしれない。均衡 (つまり最小価格とそこにおいて競争的な技術による完全雇用状態) では、価格調節と数量調節とは一般に排他的な関係にある。しかし、均衡状態の外では両者が同時複合的に作用することはありえる。本論に示したリカード理論は、技術集合と労働力が一定の場合であった。技術進歩が進み、新製品が生み出され、労働力にも変化がある場合には、たとえ均衡への強い傾向があったとしても、実際に展開されるのは、均衡以外の状態において進行する経済過程である。本論文では、そのような方向への示唆はまったく与えられていないが、それが残された大きな課題であることは間違いない。

参考文献

[池間誠 1993] 「国際生産特化パターンの確定／多数国多数財のケース」『一橋論叢』**103**(6),1-22。石川・古沢 (2005) 第 15 章、248-267。

[石川城太・古沢泰治 (編) 2005] 『国際貿易理論の展開』文眞堂。

[クルーグマン・オブスフェルト 1999] 『国際経済』第 3 版、石井菜穂子・浦田秀次郎・竹中平蔵・千田亮吉・松井均訳、新世社。

[塩沢由典 1981] 『数理経済学の基礎』朝倉書店。

[塩沢由典 1985] 「国際貿易と技術選択／国際価値論によせて ▪」『経済学雑誌』**85**(6), 44-61。

[塩沢由典 2003] 「リカードに学ぶ「貿易の利益と失業・貿易摩擦」」『巨匠が解く日本経済の難問』日経ビジネス人文庫 (695), 89-103。

[ツィーグラー, G.M. 2003] 『凸多面体の数学』八森正泰・岡本吉央訳、シュプリンガー・フェアラーク東京。

[二階堂副包 1961] 『経済学のための線型数学』培風館。

[高増明 1991] 『ネオ・リカーディアンの貿易理論』創文社。

[東田啓作 2005a] 「第 5 部 多数国多数財リカードモデルの幾何学的分析 サーベイ」石川・古沢 (2005) 第 5 部、243-247。

[東田啓作 2005b] 「中間財と国際生産特化パターン／多数国多数財モデル」石川・古沢 (2005) 第 17 章、289-302。

[三邊信夫 1971] 『外国貿易の純粋理論』風間書房。

[三邊信夫 2001] 「多数国多数財の貿易モデル」『国際経済理論の地平』第 15 章、東洋経済新報社、221-241。石川・古沢 (2005) 第 16 章、268-288。

[柳田義章 2002] 『労働生産性の国際比較研究』文眞堂。

[Balassa, Bela 1963] "An Empirical Demonstration of Classical Comparative Cost Theory," *Review of Economics and Statistics* **4**, 231-238.

[Buchanan, James M., and Yong J. Yoon 1994] The Return to Increasing Returns, Ann Arbor: The University of Michigan Press.

[Davis, Donald R. 1995] "Intra-industry trade: A Heckscher-Ohlin-Ricardo apprpach", *Journal of International Economics* **39** 201-226.

[Deardorff, Alan V. 2005a] "Ricardian Comparative Advantage with Intermediate Inputs," *North American Journal of Economics and Finace***16**, 39-71. RSIE Discussion Paper (Gerald R. Ford School of Public Policy, the University of Michigan,) No. 501. Available on World Wide Web at http://www.fordschool.umich.edu/rsie/workingpapers/wp/html.

[Deardorff, Alan V. 2005b] "How Robust is Comparative Advantage?" *RSIE Discussion Paper*(Gerald R. Ford School of Public Policy, the University of Michigan,) No. 537. Available on World Wide Web at http://www.fordschool.umich.edu/rsie/workingpapers/wp/html.

[Dornbusch, Rudinger, Stanely Fisher, and Paul Samuelson 1977] "Comparative Advatage, Trade and Payments in a Ricardian Model with a Continuum of Goods," *American Economic Rview* **67**, 823-839.

[Emanuel, Arghiri 1969] *L'échange inégal*, François Maspéro, Paris.

[Graham F.D 1948] *The Theory of International Trade*, Princeston: Princeton University Press.

[Haberler, Gottfried 1936] *Theory of Interantional Trade*, traslated from the German 1933 edition by A. Stonier and F. Benham, London:William Hodge and Co.

[Helpman, Elhanan and Paul R. Krugman 1985] *Market Structure and Foreign Trade*, Cambridge:Mass, MIT Press.

[Jones, Ronald W. 1961] "Compartive Adavantage and the Thory of Tarrifs: A Multi-Country, Multi-comodity Model," *Review of Economics Studies*, **28**(3), 161-175.

[Jones, Ronald W. and J. Peter Neary 1984] "The Positive Theory on International Trade," *Handbook of International Economics*, vol. I, Edited by R.W. Jones and P.B. Kenan, Elsevier Science Publishers B.V.

[Krugman, Paul 1996] "Ricardo's Difficult Idea," paper presented for Manchester Conference on Free Trade, available on World Wide Web at http://www.pkarchive.org/trade/ricardo.html.

[Krugman, Paul 1979] "Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade," *Journal of Interantional Economics* **9**(4) 469-479. Reprinted in Buchanan and Yoong(1994) as Chapter14.

[McKenzie, Lionel W. 1954a] "Specialization and Efficiency in World Production," *Review of Economic Studies*, **21**(3), 165-180.

[McKenzie, Lionel W. 1954b] "On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems," *Econometrica*, **22**(3), 147-161.

[McKenzie, Lionel W. 1956] "Specialization in Production and the Production Posibility Locus," *Review of Economic Studies*, **23**(3), 56-64.

[Minabe, Bobuo 1995] *Production and International Trade*, Otemon Gakuin University.

[Ricardo, David 1817:1951] *On Priciples of Political Economy and Taxation* P. Sraffa ed. with M.H. Dobb, *The Works and Correspondence of David Ricardo*, vol.1, Cambridge: Cambridge University Press.

[Samuelson, Paul A. 2001] "A Ricardo-Sraffa Paradigm Comparing Gains from Trade in Inputs nad Fihished Goods," *Journal of Econmic Literature*, **39**(4), (December 2001) 1204-1214.

[Sanyal, Kalyan K., and Ronald W. Jones 1982] "The Theory of Trade in Middle Products," *The American Economic Review* **72**(1) 16-31.

[Su, Francis Edward 1999] "Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division", *American Mathematical Monthly*, **106**, 930-942. Available at http://www.math.hmc.edu/ su/papers.dir/rent.pdf

[Suranovic, Steven 1997-2004] "The Theory of Comparative Advantage - Overview," Section 40-1, in Suranovic 1997-2004, *International Trade Theory and Policy Lcture Notes*, at http://intrnationalecon.com/v1.0/ch40/40c000.html

[Viner, Jacob 1937] *Studies in the Theory of International Trade*, London: George allen & Unwin

[Yang, Xiaokai, Wenli Chang, Heling Shi and Christis G. Tombazos (Eds.) 2005] *An Inframarginal Approach to Trade Theory*, Singapore: World Scientific.