微分方程式の漸近解析
–複雑系研究に於る数理物理的方法–

1. 認識論

人類が初めて出会った，そして我々が学校で最初に学ぶ，微分方程式の元祖ともいうべきは Newton の第二法則，すなわち運動方程式である：$f = m\alpha$. これは “正しい” 微分方程式であろうか？　そもそも“この微分方程式が正しいかどうかを考える” ことはなにを意味するのか？気体分子運動論の Boltzmann 方程式，流体運動 (連続体力学としての) の Euler 方程式および Navier-Stokes 方程式—人々はしばしばこれらを“解くこと” を考えて “正しい方程式” かどうかを考えない[1]．それどころか “次の方程式を考えます” で講演を始める者さえ多い．してみると，正しいか否かとは別に “与えられた微分方程式を解くこと” 自体に意味を見出す者が沢山いることになる．この際，“次の微分方程式” が何かを説明しない，あるいは逆に，一言で了解しない聴衆に向い，長々と “次の微分方程式を考える” ゆえんを “ 説明” する．L.Lagrange による解析力学成立以来, [27], 変分原理が成立つ微分方程式は “正しいもの” と考えられている, [6],[29].

しかし J.Leray は，ナチスに殺された J.Schauder の全集に序してこう述べている：Il étudie “les problèmes qui se posent et non ceux qu'on se pose”;...[44], p.11. とするならば，ミネルヴァの梟である変分原理より前に，我々はむしろ微分方程式をたてるそもそもの意味を反省しなければならない．“Les problèmes qui se posent” がある以上，人間の知性に立向かってくる力が存在するのであるが，それこそまさにこの知性とその担手たる人類を一部として包含する対象的自然に他ならない：自然が人類の頭脳を通して思惟する (K.Marx) のである．

武谷三男は特高警察に書かされた“手記” (1945.2) を，戦後,「技術論」として公刊した[49] (初出は 1946 年)．彼のテーゼ，“ 技術とは人間実践（生産的実践）における客観的法則性の意識的適用である” の美事さは，実に，“法則” ではなく “法則性” といい，“適用” ではなく “意識的適用” というところに端的にあらわれている．重要なのは，武谷がいう “技術” とはいわゆるテクノロジーに限定されているのではなく，物質的自然の頭脳としての人類がなすすべての働き，認識と生産の全過程を指していることである．すなわち，彼は技術論を自然（世界）認識論として展開し，いわゆる（認識（論）における）“武谷三段階論” をうちたてた：

現象論的／実体論的／本質論的認識

である．

水は低きに就く，という現象論的認識はすでに“材木ながし” による運搬などの技術として実効するが，水車を回して米麦を挽くことは，水と道具の実体的関係においてその力を認識することによって初めて実現する．しかし一定量の麦を一定の時間内に粉に挽くことを予見するのは，“境界条件を伴う微分方程式を解くこと” を通して初めて可能となるで

[1] Navier-Stokes 方程式を “修正すべし” との提唱が Leningrad school から出ている．Ladyghenskaya の著書[26]の付録および[14], [25]

あろう．武谷はいう：認識の本質論的段階において微分方程式が立現われる[2]．

物質的自然が人類の認識と労働をとうして思惟し，自己実現し，その法則性を微分方程式として現出したとき，それこそが Leray のいう les problèmes qui se posent である．従って Leray と武谷に則れば，微分方程式を解くことは，方程式をたてることのなかにすでに含まれているのである．

2. 方程式をとくこと，微分方程式の意味

Newton の第二法則 ·運動方程式の “正しさ” は，微分積分法の発見と Kepler の法則の “証明” にある．その観点から，１．で武谷について述べたことは正確ではない．つまり，武谷三男は認識論のみを述べて結論として微分方程式を位置づけたが，存在論を欠いている．微分方程式を解いたとき，認識を本質論的段階に進める過程で捨象した諸条件を“ 境界条件” として課することをとうして出発点における自然（現象）を豊かに再現できるか，否か．Newton は微分積分法を数学として構成する一方で，そこから出発してもとの出発点であった Kepler の法則を演繹してみせた．これは，しかし，“方程式をとくこと” が “それをたてること” のなかですでに実現されるという希有な例である．この小論では，はるかに限定された観点から微分方程式の意味を考えることにする．

さまざまな事情で自ら生命を絶つに到った L.Boltzmann がうちたてた気体分子運動論の方程式[3]は，気体分子の密度分布函数Fにたいし

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum v_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} Q[F, F]$$

のようにかかれ，v_j :速度，Q：分子の衝突項，で ϵ は分子が他の分子と衝突することなく運動できる平均自由行程である．平均自由行程 ϵ を零にもっていったとき（いわゆる連続体近似) 連続体としての流体運動の基礎方程式：Euler 方程式あるいは Navier-Stokes 方程式を Boltzmann 方程式が “産出” するならば，これらの方程式と同時に自らの“ 正しさ” を示したことになるであろう．Hilbert [15] から Enskog [11] を経て今日 Chapman-Enskog 展開とよばれる理論に到るながれは，これを目指したものである．

このような考察は，二通の発想を含んでいる：

１）自然探究の長い歴史を通してさまざまの人々によって発見された方程式がもつ内的連関[3] を明らかにし，それを通して各々の方程式の “正当性” を評価すること．

2)長い捨象の過程をへて得られた微分方程式はある意味では“単純” であり，それは逆に課すべき“境界条件” の多様性をもつという意味で極めて“複雑” である．これを“単純な方程式 ” の系列に “分解” し，その再合成によるさまざまの度合の“近似” を論ずること．これらを通して解の構造を深く究めることができ，従って自然認識が深まる，と考える．最素朴には，Lagrange が振動論において無限小振幅の振動を論じ，–次近似としていわゆる（線型）波動方程式（弦振動方程式）を導いた方法—線型化である[27]．一般には，何らか

[2]武谷の正確な記述はこうである:「本質論的段階において，その認識に固有なる論理的性格が あらわれる，たとえばニュートン力学における微分方程式の如き」（勁草版著作集 I, p. 92 ）．

[3]ここでは Cole-Hopf 変換により Burgers 方程式 $u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0$ と 熱方程式 $v_t - \mu v_{xx} = 0$ の内的連関が明らかになる，という種の問題は考察しない．

のパラメーターに関して方程式と（あり得べき）解を“展開” し(たとえば巾級数に), 各巾に応じた方程式が各巾に応じた認識のレベルをもたらすと考える．

二つの例を考えよう．

例１．Boltzmann 方程式に対する Chapman-Enskog 展開.

Boltzmann 方程式に対して平均自由行程 ϵ に関する（方程式の）展開を考える．この“展開” 自体の数学的意味は明らかではない．しかしながら，密度分布が Maxwell 分布から大きく離れないと考えた時，運動量について記述するとこの展開の第一項が圧縮性非粘性流体の方程式を与えるのである．存在する各々の解の差を適当なノルムで量るとき，$\epsilon \to 0$ において，その大きさが $O(\epsilon)$ であることが数学的に示される．T.Nishida [35] が初めて，もともとの非線型の Boltzmann 方程式に対し，解析函数の小さな初期値に対して，時間局所的に，厳密な数学的証明を与えた.

意味は少し複雑になるが，$O(1)$ と $O(\epsilon)$ の項を合わせて考えると，この二次近似が，圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対応することもまた Kawashima-Matsumura-Nishida [22] が証明し, ポーランドの Lachowicz [24] はその結果を Sobolev 空間の滑らかな解に対する証明に一般化した.

例２．戸田格子の連続体近似[51],§§6, 7.

戸田盛和先生は,「振動論」の中で，非線型のバネで一次元的につながった無限個の粒子系（一次元格子）の振動を扱っている．各粒子の変位 u_j とバネのポテンシャル ϕ_j によって運動方程式は

$$m_j \ddot{u}_j = -\phi_j'(u_j - u_{j-1}) + \phi_{j+1}'(u_{j+1} - u_j)$$

とかかれる（[51],p.151．(1)　式)．彼はバネに戸田格子のポテンシャル

$$\phi(r) = Ae^{-br} + ar + \text{定数}, \quad A, a, b > 0,$$

を与えて，粒子間の距離 $D \to 0$ の連続体近似を論じている，ただしここに $A = a/b$ である．

歪のない（静止）状態での粒子間の距離を D とし，一次元 x 軸上の座標を $x = nD$ で表わす．u_n は連続体近似 u によって $u_n = u(nD, t)$ と表わされると考える．$D \ll 1$ の“一次近似” として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{ab}{m}} D, \quad m : \text{粒子の質量},$$

が，“二次近似” として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \left(1 - Db \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_0^2 \frac{D^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

が与えられている．しかし真に $O(D)$ あるいは $O(D^3)$ の誤差評価がなされているのではない.

しかし，$r_n = u_n - u_{n-1}$ に対する“連続体近似” r についての“二次近似” が，

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{b}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial x^2} + \frac{D^2}{12}\frac{\partial^4 r}{\partial x^4} \right)$$

と与えられるのは注目に値する．$b < 0$ であればこれは Boussinesq 方程式であり，soliton 解をもつこの方程式は，1869-72 年，J.Boussinesq が，長い水面波に対する近似方程式として Euler 方程式から導きだしたものである．戸田先生は現に，適当な條件の下で，上の方程式から KdV 方程式を導いている，191 頁．

Taniuti-Wei [48] は上記の発想を極端におしすすめて，意味を必ずしも判然させないパラメータ ϵ に関する“解の展開” を仮定し，“複雑” な非線型方程式を単純なものに“分解” する，いわゆる“逓減摂動法” を系統的に展開した．Taniuti の論拠は，たとえば次のような，“遠方場” への分解にある．

弦振動の方程式

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

は，初期位置 $u(0,x) = \phi(x)$ と初速 $u_t(0,x) = \psi(x)$ とを与えると，

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\{\phi(x-at) + \phi(x+at)\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$

を解にもつことが，d'Alembert 以来知られている．第一項は，$t = 0$ すなわち x 軸上のある区間 $[D, A]$ で与えられた $\phi(x)$ の値が AB に平行な直線に沿って

CDAB の中に伝播し，また DE に平行な直線に沿って EDAC の中に伝播することを示している．時間 t が小さい時，解は ΔACD 上二重になっている．しかし t ：十分大になると，t 軸から十分遠い点 x においては $\phi(x-at)$ の値のみが或は $\phi(x+at)$ の値のみが伝わることがわかる．すなわち，十分時間が経った後には，十分遠い地点に伝わる振動は夫々 $u_t + au_x = 0$ あるいは $u_t - au_x = 0$ という，もとの方程式よりはるかに簡単な方程式で支配されているのである．Taniuti はこれらを“遠方場における単純波への分解” と呼ん

だのであり，全ての“複雑な” 微分方程式をこのように“分解する” ことによって解析しようと提案するのである．

しかし，個々の場合においてこれらの分解の意味が明確な場合があるにしても，一般にこの展開の意味とその数学的正当性を示すことは極めて困難である．実際，J.Cole の本 [10] は様々の問題を扱いながら，その“展開と正当性のこころみ” は極めて複雑かつ技術的で数学的明晰性の実現には乏しい．次節において我々は，水の表面波を論ずることを通して，上記 1) - 2) に関する漸近解析の“明快な実例” を示すであろう．

3. 水の表面波（二次元流水面波のFriedrichs 展開）

1. 方程式　我々は流体運動の Euler の方程式を信ずるところから出発する（次小節参照）．水は非圧縮的完全流体（非粘性流体）とみなされている．鉛直方向に y 軸をとり xy 平面に垂直な z 方向に流体の運動は一様とすると，いわゆる二次元流となる．

流体の速度ベクトルを

$$U = {}^t(u, v) = {}^t(u(t, x, y), v(t, x, y))$$

とすると，非圧縮性は

$$\operatorname{div} U = u_x + v_y = 0$$

で記述される．Helmholtz の渦定理（Lamb [28], §146）によって，水面波は流体の渦なし運動 (irrotational motion) の自由表面である：i.e.

$$\operatorname{rot} U = v_x - u_y = 0.$$

かくて U はポテンシャル $\Phi(t, x, y)$ をもつ[4]，これを速度ポテンシャルと呼ぶ：

$$U = \operatorname{grad} \Phi.$$

速度ベクトル場がもつこれら三つの条件から連続の方程式（質量保存則):

$$\Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \tag{3.1}$$

が成立．

水面 S は

$$F(t, x, y) = y - \Gamma(t, x) = 0, \quad \Gamma(t, x) > 0,$$

で記述される，とすれば，Lagrange 微分して，

$$\frac{DF}{Dt} = F_t + uF_x + vF_y = -\Gamma_t - u\Gamma_x + v = 0,$$

即

$$\Gamma_t + \Gamma_x\Phi_x - \Phi_y = 0, \quad y = \Gamma(t, x) \tag{3.2}$$

[4]Green の公式．なお，流体力学では $U = -\operatorname{grad}\Phi$ としない．

が成立.

運動方程式

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = X - \dfrac{1}{\rho} p_x \\ v_t + uv_x + vv_y = Y - \dfrac{1}{\rho} p_y, \end{cases}$$

ここに

$$\begin{cases} f = {}^t(X, Y) = {}^t(0, -g) : \text{外力は重力のみ}, \\ \qquad\qquad p : \quad \text{圧力}, \qquad \rho : \text{密度}, \end{cases}$$

を空間方向に一回積分して,

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + P + F = C(t) \tag{3.3}$$

を得る．ここに

$$\begin{cases} F = -gy : \text{外力} f \text{のポテンシャル} \\ P = \displaystyle\int^p \frac{dp}{\rho}, \quad C(t)\text{は積分“定数”}, \end{cases}$$

すなわち，水は密度 ρ が圧力 p から一義的に定まる流体（これをバロトロピー流と呼ぶ）であるとみなされている.

この積分の過程は流体力学のどの本にも書かれていることであるが，要はベクトル解析の，下の計算にある：

$$\begin{aligned} (U \cdot \nabla)U &= \begin{pmatrix} uu_x + vu_y \\ uv_x + vv_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} uu_x + vv_x - v(v_x - u_y) \\ uu_y + vv_y + u(v_x - u_y) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{grad}(\frac{1}{2}|\nabla U|^2) - U \times \mathrm{rot}\, U. \end{aligned}$$

“渦なし” の条件から $\mathrm{rot}\, U = 0$, 結局 $(U \cdot \nabla)U = \mathrm{grad}(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2)$ を得て，運動方程式の第一積分 (3.3) を得る．これはいわゆる“圧力方程式” で,

$$P = \int^p \frac{dp}{\rho} = -\Phi_t - \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 - gy + C(t)$$

である．今，水の密度 $\rho =$定数とし，水の表面では大気圧一定の条件の下，t の任意函数 $C(t)$ を

$$C(t) = P = \int^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$$

ととることにより，水面で成立つ“運動量保存則”

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy = 0, \quad y = \Gamma(t, x), \tag{3.3$'$}$$

が得られる．更に水底 $y = 0$ では吸込も湧出もないとすると，$\Phi_y = 0$, $y = 0$.

以上より結局，水面波は次の方程式で記述される，ただし

$$\Omega(t) = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < \Gamma(t,x)\}, \quad t > 0$$

は水が占める領域である：

$$(A.1) \qquad \Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \Omega(t), \quad t > 0$$

$$(A.2) \qquad \Phi_y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y = 0$$

$$(A.3) \qquad \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + gy = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y = \Gamma(t,x)$$

$$(A.4) \qquad \Gamma_t + \Gamma_x\Phi_x - \Phi_y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y = \Gamma(t,x)$$

これに初期条件：初期時刻 $t = 0$ におけるポテンシャルと水面の形（表面波）を与えて (A.1)-(A.4) を解くことになる：

$$(A.5) \qquad \Phi(0,x,y) \equiv \Phi_0(x,y) : \text{調和}$$

$$(A.6) \qquad \Gamma(0,x) \equiv \Gamma_0(x) > 0.$$

2. 水面の方程式

前小節 3.1 の (A.1)-(A.6) は一見したところ領域 $\Omega(t)$ における $\Delta\Phi = 0$ に対する初期値–境界値問題にすぎない．しかし，実際には，$y = \Gamma(t,x)$ における境界条件は調和函数 Φ の $\Omega(t)$ の境界における値 $\Phi_x|_{y=\Gamma}$, $\Phi_y|_{y=\Gamma}$ および $y = \Gamma$を知ってはじめて確定するのである．従ってこの境界値問題を解くためには，$\Delta\Phi = 0$ のみならず境界条件を確定する方程式 (A.3)-(A.4) をも同時に解かなければならないという，下世話でいえば“自己矛盾的” 困難が含まれているのである．

少し詳しく見てみよう．(A.3)-(A.4) は（水の）表面 $y = \Gamma(t,x)$ で成り立つ（べき）方程式である．然るにこれらは，共に Φ_y を含んでおり，これは $y = \Gamma(t,x)$ という一次元の空間における計算のみでは取扱われない性質のものである．従って (A.3)-(A.4) を解くというのであれば，$y = \Gamma(t,x)$ における “法線方向微分” の値 $\Phi_y|_{y=\Gamma}$ を“接線方向微分” の $y = \Gamma$ 上の値 $\Phi_x|_{y=\Gamma}$ でおきかえることができなければならない．歴史的にみて水面波方程式を厳密に数学的に解くことが困難であった原因はほとんどここに集約されていると言ってよい．

調和函数の法線方向微分の境界値に接線方向の境界値を対応させるいわゆる Dirichlet-Neumann map は, 領域が一般の場合その具体的表示が極めて難しい．今，水面波の場合を考えると，境界が曲がっているのみならず，その境界（水面）は時間とともに形を変えるのであり，Dirichlet-Neumann map の具体的表示は一層難しい．

われわれは，L.C.Woods [53] にならって水が占める領域 $\Omega(t)$ を帯状領域に等角写像し，Dirichlet-Neumann map の特異積分表示を，核の具体的な形をもって書下す．その逆像によって $\Phi_y|_{y=\Gamma}$ を $\Phi_x|_{y=\Gamma}$ をもって表示することを得て，初めて (A.3)-(A.4) を真に境界 $y=\Gamma$ 上の方程式として“閉じた” 形で表現することができる．その具体は後小節に述べる．

次の課題は，実際に (A.3)-(A.4) を解くことである．存在定理は解析函数のクラスで知られているにすぎない[5] :[32], [45], [38], [16]．これも上記と合わせて次小節で述べよう．

3．変分原理

ところで (A.1)-(A.4) は“正しい方程式” であろうか？ J.Luke [29]は，これに対する変分原理を証明している． ただしいわゆる Lagrangian を用いない：すなわち

$$(*)\qquad \begin{cases} L^* = \int_0^{\Gamma(t,x)} \{\frac{1}{2}(\Phi_x^2+\Phi_y^2) - gy\} dy \\ \delta \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} L^* dxdt = 0 \end{cases}$$

からは，水面 $y=\Gamma(t,x)$ における條件が得られない．Luke は

$$(**)\qquad \begin{cases} L = \int_0^{\Gamma(t,x)} \{\frac{1}{2}(\Phi_x^2+\Phi_y^2) + \Phi_t + gy\} dy \\ \delta \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} L dxdt = 0 \end{cases}$$

なる“変分原理” によって (A.1)-(A.4) が導かれることを示し，更に，$(*)$ と $(**)$ との関係を吟味している．ともあれ，Euler-Lagrange の解析力学と微妙にずれながらも一種の変分原理をもつことによって，水面波の方程式はひとまず“正しい” ものと考えてよいであろう，云々．

我々は別の観点から，つまり §2 で述べた観点から，この“正しさ” を吟味しようとする．

[5] Lagrange 座標系においては，Sobolev 空間での存在定理がある：Nalimov [31], Yosihara [54], [55], W.Craig [8].

4. Friedrichs 展開

4.1. Historique. 内容に入る前に歴史的背景をすこし述べる．
(1) スコットランドの造船技師 John Scott Russell が孤立波 (solitary wave) を発見したのは 1834 年のことである．その時の彼の感動を，下の文章から読み取ることが出来るであろう：

$\cdots$ I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its courses along the channel apparently without change of form or diminuation of speed. I follwed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phaenomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears; $\cdots$ (pp. 319-320, Report on waves, John Scott Russell, 1844) [43].

よく知られている“家なき児 (sans famille)” には，岸を行く馬につながれて運河を進む船が出てくる．主人公の実の母が病弱の弟と共に旅しているのである．下流に向かっていた船が止まった時，舳先に盛り上がっていた水が船を離れて流下って行く．Russell は，この波がほとんど形を変えることなく 1-2 マイルも運河を流下っていく姿を見て感動し，Euler の方程式からどうすればこのような波の存在を説明出来るかを考えた．1844 年出版された“報告” [43] はまことに興味深い．彼は solitary wave の速度を無限小振幅の波の速度(Lagrange) $\sqrt{gh}$, (h: 水深，g: 重力加速度) より詳しい二次近似まで“計算” し，下の実験式を示した：

$$\bar{c} = \sqrt{g(h+k)}, \quad k : \text{静水面からの水面のずれ}$$

Russell は自分が発見したこの solitary wave を “the wave of the first order” と呼んだ．

(2) ところが，これに対して G.B.Airy から猛烈かつ執拗な攻撃がなされた．グリニッヂ天文台長であった“権威” Airy は，1848 年，Lagrange の一次近似 [27]

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{3.4}$$

に次ぐ二次近似として，水の表面波は

$$\begin{cases} u_t + uu_x = -g\gamma_x \\ \gamma_t + u\gamma_x = -(h+\gamma)u_x, \end{cases} \tag{3.5}$$

で記述されると説明した [2]，　ここに u: 流体の速度，$\gamma = \Gamma - h$, h: 平均水深，g: 重力加速度，である．

Airy の論点は次のとうりである：上の方程式の解は有限時間内に“ こわれる ” (break down) から，Russell の主張するごとき“形を（ほとんど）変えることなく長時間に渉って伝播する solitary wave” は理論的にありえない，云々．それどころか Airy は「Russell の“理論” は本人以外には通用しないものであるから，読者がそれを信じこむ危険を冒さないよう警告したい」とさえ書きしるしている,[2], p.350.

では Russell の孤立波は彼の“幻夢” なのであろうか？　両者のどちらが“正しい” のであろうか？　次に，そこに光をあてることになる G.G.Stokes の“長い波” の理論を述べるが，その前に，Airy 方程式 (3.5) の波が有限時間内にこわれてしまう事情を見ておこう．

実は後に明らかになるのであるが，Airy の方程式は上の (u, γ) についてではなく，u と $\Gamma = \gamma + h$ (水底からはかった水面）とについて書くのが “正しい” のである．即ち，上の $\gamma + h$ をあらためて γ と書いて

$$(3.5)' \qquad \begin{cases} u_t + uu_x + g\gamma_x = 0 \\ \gamma_t + u\gamma_x + \gamma u_x = 0, \quad \gamma > 0. \end{cases}$$

今　$\gamma = \dfrac{f^2}{g}$　で $f = \sqrt{g\gamma} > 0$　を定義すれば，上の $(3.5)'$ は

$$\begin{cases} u_t + uu_x + 2ff_x = 0 \\ 2f_t + 2uf_x + fu_x = 0 \end{cases}$$

となる．これより辺々の和，差をとることにより，

$$P = u + 2f = u + 2\sqrt{g\gamma}, \quad Q = u - 2f = u - 2\sqrt{g\gamma}$$

が満たす方程式

$$P_t + (f + u)P_x = 0$$

および

$$Q_t - (f - u)Q_x = 0$$

が得られる．水面に関する量 P は $f + u$ の速度で $x > 0$ 方向に進行（伝播）し，Q は $f - u$ の速度で $x < 0$ の方向に進行（伝播）する．然るに，速度 $f + u$, $f - u$ は，水面の高さ γ が高いほど，大きい．すなわち，P, Q の伝播速度は f が（すなわち γ が）大きい程大きい．$f = \frac{1}{4}(P - Q)$ に注意すれば，上の事実は水面 γ が高い程水面波 $y = \gamma$ は大きい速度で伝播することを意味している．従って，たとえば下の概念図

の如く，波頭が次第に進行方向にせりだして来て，やがて break down が生起するのである．

(3) さて Stokes は，1847 年，水深 h に比して波高 $a=|\gamma|=|\Gamma-h|$ が小さい“長い波” を考察し，一次近似として線型波動方程式 (3.4) を，二次近似として次式で与えられる水面波の形を計算した [47], p.454:

$$y = a\cos mx - \frac{3a^2}{4m^2h^3}\cos 2mx.$$

ここに $m \sim \frac{1}{\lambda}$, λ: 波長，である．更に Stokes の“長い波” の伝播速度 c は

$$c^2 = \frac{g}{m}\tanh mh$$

であり，波高 a によらない (Stokes [47] §6, p.205)．このことは，時間と共に姿を変えない波，Scott Russell の孤立波の存在を一概に否定し去れないことを示唆している．ここに，Airy の二次近似 (3.5) に対応する伝播速度は

$$c = c_0\left(\sqrt{1+\frac{\gamma}{h}} - 1\right), \quad c_0 = \sqrt{gh}$$

であり，これは波高に依存するから，既に述べた如く Airy は Scott Russell を否定することになるのである．

以下我々は (1), (2) と (3) の関係を明らかにし，三者三様の“正しさ ” を論じるであろう．それを理論的に明示するのが，主題にいう Friedrichs 展開である．

4.2. Friedrichs 展開 I (歴史)

第二次大戦中の沢山の研究を一気に公開する形で，ニューヨーク大学“クーラン研究所” 紀要 Communications on Pure and Applied Mathematics (以下 CPAM と略す) 第一巻 (1948) は流体力学特集の観を呈した．その巻頭，J.J.Stoker の論文の附録として K.O.Friedrichs は，水面波の Euler 方程式 (A.1)-(A.4) から浅水波方程式，すなわち 水深h/波長λ が比較的小さい波の方程式が，どのようにして“自然に” 導かれるかを示した．

初期時刻 $t=0$ における水面を $y=\eta(x,0)$ とし，$\eta(0,0)$ が水面からもっとも高い“盛上り” であるとするとき，η の $(0,0)$ における曲率 κ をもって $\sigma=\kappa h$ に関する水面波の“巾級数展開” を考える．この展開を (A.1)-(A.4) に代入した時，σ に関する定数項すなわち $O(\sigma^0)$ の項$=0$ とおいたものが，実に Airy の第二次近似，浅水波方程式 (3.5) に他ならないことを Friedrichs は示したのである．

彼の議論はまことに平明である．しかし，当の Friedrichs が書いているように，上の “巾級数展開” が “いかなるものとして，どのように可能なのか”，つまり解は σ に関して解析的なのか, 或は上の展開は漸近展開なのか—は，この時点 (1948) では全くわからない．しかしこの展開は，Airy の“天才をもって取り出された” 浅水波方程式を，“浅水波” の概念—$\sigma=\kappa h$ が相当に小さい—のみを指針に Euler の方程式から平明かつ systematic な手法で導き出す非常に美しい考え方であった．

今ひとつ大きな問題がある．これは実に本稿の通奏低音に関わる事柄である．上記論文 “On the derivation of shallow water theory” の脚注の中で Friedrichs は，上

の “Friedrichs 展開” が偏微分方程式論にとって意味することは何か，を論じている．(A.1) $\Delta\Phi = 0$ は有限伝播速度の現象を記述しない．例えば T.Carleman [5] は “静かな水面に突如ふきつけた風が波を起す時，波立つ水面と依然静かな水面とを分かつ明確な境界が存在するであろうか?” と問うて，それがありえないこと，“もしあれば 調和函数の一意性に反すること”を示した．

然るに，(A.1) と (A.2)-(A.4) の境界条件とを共に満たすべき水面波は，$\sigma = \kappa h \ll 1$ において $\{u, \gamma\}$ に関する準線型双曲型方程式 (3.5) で近似される，と Friedrichs (Airy) はいうのである．勿論上の Friedrichs 展開が数学的妥当性をもつとした時に，である．双曲型方程式が記述する現象は有限伝播速度をもつ [Courant-Hilbert, t. II]. Friedrichs は言う: The problem is of considerable mathematical interest also because of the following intriguing circumstance:the approximation of lowest order to the solution of a potential problem is sought in the form of a solution of a non-linear wave equation, and this means that the solution of a problem of elliptic type is approximated (at least in the lowest order) by the solution of a problem of hyperbolic type [12], p. 81.

後に我々はこの “謎” をとくであろう．我々はまず，Friedrichs 展開が σ に関する漸近展開であること，すなわち，水面波は $\sigma = \kappa h$ に関して無限回微分可能であることを示す．更に，(A.1)-(A.4) の楕円型境界値問題は $\sigma = \kappa h \to 0$ の極限において x 方向に退化しており，楕円性が退化する将に “その瞬間” において “近似する” 双曲型方程式が (浅水波方程式として）立現われるのであることを示す．Friedrichs 展開は elliptic equation と hyperbolic equation とを結びつける特異摂動（問題）の美しい一典型である．

この小節の締くくりに，Friedrichs が何故この浅水波方程式 (3.5) とそれの Euler 方程式からの systematic な導出に “こだわった” のかを述べておこう．浅水波方程式は形において polytropic gas, 即ち，内部エネルギーが絶対温度に比例するタイプの理想気体の運動方程式と同じである [7], [46]. 理想気体の方程式は Newton の法則 (と状態方程式) から導かれたものであり，加圧または減圧による気体運動を考えるいわゆるピストン問題に関し，解の不連続面 (衝撃波) が生起·伝播する理論がある．同一の形の方程式の解は同じ性質をもつ．沖から打寄せる波が次第にこちらへ巻込んで来て，遂には “波打際” で大きく崩れる．これをこそ Airy の方程式が示すものであるとすれば，これは実に，ショックを生起する水面波の非線型性が二次近似として美事にとりだされたものこそ浅水波方程式に他ならないということになろう．これは前節で述べた，史上発見された種々の方程式達の間の内的連関を示す美事な一例というべきであろう．

4.3. Friedrichs 展開 II (理論 1)

[1^0] 理論としては Friedrichs のものと全く同じである，次の形の無次元（化）問題を考える．

x 方向，y 方向の基準の長さとして各々波長[6] λ, 平均水深 h; 重力加速度 g, 音速[7]

---

[6] これは象徴的にいうにすぎない．波長が測定できればそれでよし，さもないときは，x 方向の 任意のスタンダードをひとつ採ればよい．

[7] Courant-Friedrichs [7], §2, §35; Prandtl-Tietjens [42], §62.

$c=\sqrt{gh}$ によって (A.1)-(A.6) を次の様に無次元化する：

$$
\begin{cases}
(t,x,y)=(\frac{\lambda}{c}t',\lambda x',hy') \\
\Gamma=h\Gamma',\quad \Phi=c\lambda\Phi' \\
\Gamma_0=h\Gamma_0',\quad \Phi_0=c\lambda\Phi_0'.
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

この無次元化の意味を理解するために次のことに注意しよう．速度成分 ${}^t(u,v)$ は ${}^t(u'.v')$ に無次元化されるが，次がなりたつ：

$$
\begin{cases}
u=\Phi_x=\frac{c\lambda\Phi'_{x'}}{\lambda}=c\Phi'_{x'}=cu' \\
v=\Phi_y=\frac{c\lambda\Phi'_{y'}}{h}=c\frac{\lambda}{h}\Phi'_{x'}=c\frac{\lambda}{h}v'.
\end{cases}
$$

今無次元パラメーター

$$
\delta=\frac{h}{\lambda}=\frac{\text{平均水深}}{\text{波長}}
$$

を定義すると，無次元速度は

$$
\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=\frac{1}{c}\begin{pmatrix} u \\ \delta v \end{pmatrix}
$$

で与えられる．Airy が “浅水波” と呼ぶのは，水深に比して波長が大きい，すなわち δ 小，の水面波である．上の結果は，我々の無次元化で見ると x-方向の速度成分はせいぜい u の定数（音速）倍にすぎないが，y-方向の速度成分は更に δ 倍される．すなわち，$h\ll\lambda$ である “浅い水の波” は垂直速度成分が，水平速度成分に比して小さい．“浅水波” たるゆえんが無次元パラメータ δ によって定量的に表示される．方程式 (A.1)-(A.4) は，次の様な無次元型にかかれる（プライムを省いて書く）：

$$
\delta^2\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0, \tag{B.1}
$$

$$
(x,y)\in\Omega=\{(x,y):x\in\mathbb{R},0<y<\Gamma(t,x)\},\ t>0
$$

$$
\Phi_y=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad y=0, \tag{B.2}
$$

$$
\delta^2(\Phi_t+\frac{1}{2}\Phi_x^2+\Gamma)+\frac{1}{2}\Phi_y^2=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad y=\Gamma(t,x), \tag{B.3}
$$

$$
\delta^2(\Gamma_t+\Gamma_x\Phi_x)-\Phi_y=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad y=\Gamma(t,x), \tag{B.4}
$$

上の方程式系の，初期値

$$
\Phi(0,x,y)\equiv\Phi_0(x,y) \tag{B.5}
$$

$$
\Gamma(0,x)\equiv\Gamma_0(x)>0. \tag{B.6}
$$

に対する解 $\{\Phi^\delta(t,x,y),\Gamma^\delta(t,x,y)\}$ に Friedrichs 展開

$$\begin{aligned}\Phi^\delta &\sim \Phi^0+\delta^2\Phi^1+\cdots+\delta^{2n}\Phi^n+\cdots\\ \Gamma^\delta &\sim \Gamma^0+\delta^2\Gamma^1+\cdots+\delta^{2n}\Gamma^n+\cdots\end{aligned} \tag{3.7}$$

を仮定して代入すると，若干の計算の後に，$O(1)=O(\delta^0)$ の係数$=0$ は

$$\begin{cases}\Phi^0_t+\frac{1}{2}(\Phi^0_x)^2+\Gamma^0=0\\ \Gamma^0_t+(\Gamma^0\Phi^0_x)_x=0\end{cases} \tag{3.8}$$

をあたえる [16]. $\gamma=\Gamma^0$, $u=\Phi^0_x$ についてかけば，これは Airy の浅水波方程式に他ならない.

$[2^0]$ 我々は [16], [17] において,

1) 解析的初期値 $\Phi_0(x,y)$, $\Gamma_0(x)$ に対し (B.1)-(B.4) の解析函数解の存在を有限時間に対して示し，それが δ に関して無限回微分可能であることをしめした.

2) その際本質的なのは，小節 3.1 で述べた $\Phi_y|_{y=\Gamma}$ に $\Phi_x|_{y=\Gamma}$ を対応させるいわゆる Dirichlet-Neumann map を，等角写像した帯状領域で，以下の様に具体的に表示したことである.

もともと水が占めている領域 $\Omega(t)$ を $z=x+iy$ 平面の領域とみなし，それを $\zeta=\xi+i\eta$ 平面の帯状領域

$$\Omega_h=\{(\xi,\eta):\xi\in\mathbb{R},0<\eta<h\} \tag{3.9}$$

に等角写像し，その写像函数

$$z=z(t,\zeta)=x(t,\xi,\eta)+iy(t,\xi,\eta) \tag{3.10}$$

を定める問題に，我々の問題を帰着する：

(1^0) まず Φ の共役調和函数 Ψ をもって $F=\Phi+i\Psi$ を $z=x+iy$ の正則函数として (A.1)-(A.4) を満たす様に求める問題になおす.

(2^0) 等角写像 (3.10) による $F=\Phi+i\Psi$ の像 $f=\phi+i\psi$ が方程式 (A.1)-(A.4) の像を満足するように，写像函数 $z=z(t,\zeta)$ を定める問題として我々の元の問題を再構成する：

$$\Delta\phi=\phi_{\xi\xi}+\phi_{\eta\eta}=0 \quad \text{in} \quad \Omega_h \tag{3.11}$$

$$
(3.12) \qquad \begin{cases} \operatorname{Im}(\frac{z_t}{z_\zeta}) = -\operatorname{Im}(\frac{f_\zeta}{|z_\zeta|^2}), \quad \eta = h \\ \operatorname{Re}(f_t - (\frac{z_t}{z_\zeta}) f_\zeta) = -\frac{1}{2}|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}|^2 - gy, \quad \eta = h \end{cases}
$$

$$
(3.13) \qquad \operatorname{Im}(\frac{z_t}{z_\zeta}) = \frac{\partial}{\partial \eta} \operatorname{Re}(f_t - (\frac{z_t}{z_\zeta}) f_\zeta) = 0, \quad \eta = 0
$$

(3^0) この際 $\Delta\phi = 0$ に対する次の事実が重要である：
$\zeta = \xi + i\eta$ 平面の帯状領域

$$
\Omega_h = \{(\xi, \eta) : \xi \in \mathbb{R}, 0 < \eta < h\}
$$

における正則函数 $w = u + iv$ に対し次が成立： $\forall \xi_0 \in \mathbb{R}$ に対し

$$
(3.14) \qquad v(\xi_0) = (A_h u)(\xi_0) := \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\sinh \frac{\pi}{2h}(\xi - \xi_0)} d\xi.
$$

また，A_h の逆作用素 B_h によって $u(\xi_0)$ が

$$
u(\xi_0) - u_{-\infty} = (B_h v)(\xi_0)
$$

と表わされ，更に次が成立：

$$
(3.15) \qquad (B_h v)(\xi_0) = (-A_h + C_h) v(\xi_0),
$$

$$
(3.16) \qquad (C_h v)(\xi_0) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi)(1 - \tanh \frac{\pi}{4h}(\xi - \xi_0)) d\xi,
$$

すなわち $u_{-\infty} = u(-\infty)$ として

$$
(3.17) \qquad u(\xi_0) = -(A_h v)(\xi_0) + \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) \left(1 - \tanh \frac{\pi}{4h}(\xi - \xi_0)\right) d\xi + u_{-\infty},
$$

cf. Plemelj [41], Muskhelishvili [30], L.C.Woods [53].

(4^0) 以上により，我々の元の問題 (A.1)-(A.4) は，等角写像の結果，帯状領域 Ω_h における $\Delta\phi = \phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = 0$ に対する境界値問題となる．従って $\eta = h$ における方程式を解いて $\Delta\phi = 0$ に対する境界条件を確定することが果すべき不可欠の課題である．その方程式 (3.12) は結局次の様にかかれる：

$$
(3.18) \qquad \begin{cases} \frac{z_t}{z_\xi} = -B_h(\frac{\psi_\xi}{|z_\xi|^2}) - i(\frac{\psi_\xi}{|z_\xi|^2}) \\ f_t - (\frac{z_t}{z_\xi}) f_\xi = -\frac{1}{2}|\frac{f_\xi}{z_\xi}|^2 - gy - iA_h(\frac{1}{2}|\frac{f_\xi}{z_\xi}|^2 + gy). \end{cases}
$$

この方程式から実際に $\operatorname{Re} z = x(t, \xi, \eta)$ および $\operatorname{Re} f = \phi(t, \xi, \eta)$ を得れば，$f = \phi + i\psi$ と $z = x + iy$ の $\eta = h$ における境界値が，従って $\Delta\phi = 0$ に対する Ω_h における境界条件が定まる．

先の無次元化 (3.6) に対応する (ξ,η) 空間における無次元化

$$\begin{cases} (\xi,\eta)=(\lambda\xi',h\eta') \\ (x,y)=(\lambda x',hy') \\ \qquad \phi=c\lambda\phi' \end{cases} \tag{3.19}$$

により，無次元量 x, ϕ ($'$ をとって) は

$$\Omega_1=\{(\xi,\eta):\xi\in\mathbb{R}^1, 0<\eta<1\} \tag{3.20}$$

で

$$\delta^2\phi_{\xi\xi}+\phi_{\eta\eta}=0,\quad \delta^2x_{\xi\xi}+x_{\eta\eta}=0 \tag{3.21}$$

を満たす．更に，境界 $\eta=1$ において

$$\begin{cases} \bar{x}=x(t,\xi,1;\delta) \\ \bar{y}=y(t,\xi,1;\delta) \\ \bar{\phi}=\phi(t,\xi,1;\delta) \end{cases}$$

は次の方程式を満たす，ただし A_δ, B_δ は (3.14)-(3.16) の定義に準ずる：

$$\begin{cases} \bar{x}_t=\frac{A_\delta\bar{x}_\xi A_\delta\bar{\phi}_\xi}{\bar{x}_\xi^2+(A_\delta\bar{x}_\xi)^2}-\bar{x}_\xi B_\delta\left(\frac{A_\delta\bar{\phi}_\xi}{\bar{x}_\xi^2+(A_\delta\bar{x}_\xi)^2}\right) \\ \bar{\phi}_t=-\frac{1}{\delta}A_\delta\bar{x}+\frac{1}{2}\frac{(A_\delta\bar{\phi}_\xi)^2-\bar{\phi}_\xi^2}{\bar{x}_\xi^2+(A_\delta\bar{x}_\xi)^2}-\bar{\phi}_\xi B_\delta\left(\frac{A_\delta\bar{\phi}_\xi}{\bar{x}_\xi^2+(A_\delta\bar{x}_\xi)^2}\right) \\ \bar{y}=\frac{1}{\delta}A_\delta\bar{x},\quad \bar{\psi}=A_\delta\bar{\phi}. \end{cases} \tag{$\sharp$}$$

初期条件

$$\begin{cases} \bar{x}(0)=x(0,\xi,1;\delta)=x_0(\xi) \\ \bar{\phi}(0)=\phi(0,\xi,1;\delta)=\phi_0(\xi) \end{cases} \tag{$\sharp\sharp$}$$

によって ($\sharp$) を解くことが我々の課題となる．

これによって定まる境界条件と $\phi_\eta=0$, $\eta=0$ とによって，Ω_1 における (3.21) に対する (初期値-) 境界値問題が解かれる：

(A) Nirenberg-Nishida 版の abstract Cauchy-Kowalevski theorem ([33], [34]) により，解析的な ($\sharp\sharp$) に対して ($\sharp$) は，局所時間について，解析函数解 $\{\bar{x}^\delta,\bar{\phi}^\delta\}$ をもつことが示される：[16], 定理 5.1.

(B) 上の解 $\{\bar{x}^\delta(t,\xi),\bar{\phi}^\delta(t,\xi)\}$ は δ に関して無限回微分可能である：[17] 定理 2.3.

(C) この解 $\{\bar{x}^\delta(t,\xi),\bar{\phi}^\delta(t,\xi)\}$ から，Cauchy の積分公式によって，$0<\eta<1$ におけるポテンシャル $\phi^\delta(t,\xi,\eta)$ が δ に関する無限回微分可能函数として得られる．また “水面” は $\bar{y}(t,\xi)=\frac{1}{\delta}A_\delta\bar{x}(t,\xi)$ で与えられる．

$[3^0]$ 上に得られた解 $\{\bar{x}^\delta(t,\xi), \bar{\phi}^\delta(t,\xi)\}$ から，等角写像 (3.10) の逆像として $\{\Gamma(t,x), \Phi(t,x)\}$ が定義され，それが我々が求める (B.1)-(B.6) の解である．

（イ）まず，水面 $y = \Gamma(t,x;\delta)$ およびポテンシャルの水面における値 $\bar{\Phi} = \Phi(t,x,\Gamma(t,x;\delta);\delta)$ は

$$(*) \qquad \begin{cases} \Gamma(t,x(t,\xi,1;\delta);\delta) = y(t,\xi,1;\delta) \\ \bar{\Phi}(t,x(t,\xi,1;\delta);\delta) = \phi(t,\xi,1;\delta) \end{cases}$$

によって定まる．

水底が現われない様な波のみが考察されているから (解析函数でなくても!)，ある正数 $v_- > 0$ が存在して

$$x_\xi(t,\xi,1;\delta) \geq v_-$$

が成立[8]．従って $x = x(t,\xi,1;\delta)$ は逆函数 $\xi_1 = \xi(t,x;\delta)$ をもつ．これを上の $(*)$ に代入して，

$$\begin{cases} \Gamma(t,x;\delta) = y(t,\xi_1,1;\delta) \\ \bar{\Phi}(t,x;\delta) = \phi(t,\xi_1,1;\delta) \end{cases}$$

を得る．こうして

$$\begin{cases} \Gamma^\delta(t,x) = \Gamma(t,x;\delta) \\ \bar{\Phi}^\delta(t,x) = \Phi(t,x,\Gamma(t,x;\delta);\delta) \end{cases}$$

が δ に関して無限回微分可能な解析函数であることがわかる．

（ロ）$0 < y < \Gamma^\delta(t,x)$ におけるポテンシャル Φ.

まず Cauchy の積分公式から

$$\begin{aligned} z(t,\xi,\eta;\delta) &= x(t,\xi,\eta;\delta) + iy(t,\xi,\eta;\delta) = \\ &= \frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t,\xi',1;\delta)}{\cosh\frac{\pi}{2\delta}(\xi' - (\xi + i\delta\eta))} d\xi' \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} f(t,\xi,\eta;\delta) &= \phi(t,\xi,\eta;\delta) + i\psi(t,\xi,\eta;\delta) = \\ &= \frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t,\xi',1;\delta)}{\cosh\frac{\pi}{2\delta}(\xi' - (\xi + i\delta\eta))} d\xi' \end{aligned}$$

が得られる．等角写像の逆写像は

$$\{x = x(t,\xi,\eta;\delta), y = y(t,\xi,\eta;\delta)\}$$

を定めるから，これらを f に代入して

$$F(t,x,y;\delta) = f(t,\xi,\eta;\delta)|_{(\xi,\eta)=(\xi,\eta)(t,x,y;\delta)}$$

[8] 正確には：$v_- > 0$ に対し、$\sup|u| \leq ||u||$ をみたす適当なノルムによって、例えば $||x_{0\xi} - v_-|| \leq R_0 < \frac{1}{2}v_-$ ととる。この初期値に対し $||x_\xi(t) - v_-|| \leq 2R_0 < v_-$ なる解を 求める。

が，複素速度ポテンシャルを与える．これより

$$\Phi(t,x,y;\delta) = \mathrm{Re}\, F$$

が，δ に関して無限回微分可能なポテンシャルの解析函数解として，得られる．

[4^o]　展開．先に定義された A_δ と A_δ の逆 $B_\delta = -A_\delta + C_\delta$ は，C^∞ 函数に対し次の様に作用する：

$$\text{(3.22)} \qquad \frac{A_\delta}{\delta}u(\xi) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=0}^{N}(\frac{\delta}{\pi})^{2m}(2^{2m+2}-1)\zeta(2m+2)\frac{\partial^{2m+1}u(\xi)}{\partial\xi^{2m+1}} + \\ + O(\delta^{2N+2}), \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

$$\text{(3.23)} \qquad \begin{aligned} \delta C_\delta v(\xi) = &\int_{-\infty}^{\xi} v(\xi)d\xi + \\ &+ 4\sum_{m=0}^{N}(\frac{\delta}{\pi})^{2m}(2^{2m-1}-1)\zeta(2m)\frac{\partial^{2m-1}v(\xi)}{\partial\xi^{2m-1}} + \\ &+ O(\delta^{2N+2}), \quad u \in C^\infty(\mathbb{R})\cap L^1, \end{aligned}$$

ここに $\zeta(s)$ は Riemann zeta 函数．

　これより直に次のことがわかる:

$$\text{(3.24)} \qquad \frac{A_\delta}{\delta}u(\xi) \to u_\xi(\xi), \quad \delta C_\delta v(\xi) \to \int_{-\infty}^{\xi} v(\xi)d\xi, \quad \delta \to 0.$$

これと方程式 ($\sharp$) から，$\delta \downarrow 0$ の極限として

$$\text{(3.25)} \qquad \begin{cases} \bar{y}^0 = \bar{x}^0_\xi \\ \bar{x}^0_t = -\bar{x}^0_\xi \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\bar{\phi}^0_{\xi\xi}}{(\bar{x}^0_\xi)^2} d\xi \\ \bar{\phi}^0_t = -\bar{x}^0_\xi - \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\phi}^0_\xi}{\bar{x}^0_\xi}\right)^2 - \bar{\phi}^0_\xi \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\bar{\phi}^0_{\xi\xi}}{(\bar{x}^0_\xi)^2} d\xi \end{cases}$$

を得る．逆像

$$\Gamma^0(t,\bar{x}^0) = \bar{y}^0(t,\xi_1,1;0)$$
$$\bar{\Phi}^0(t,\bar{x}^0) = \bar{\phi}^0(t,\xi_1,1;0)$$

が浅水波方程式の解である：

$$(\mathrm{S}_0) \qquad \begin{cases} \bar{\Phi}^0_t + \frac{1}{2}(\bar{\Phi}^0_x)^2 + \Gamma^0 = 0 \\ \Gamma^0_t + (\Gamma^0\bar{\Phi}^0_x)_x = 0. \end{cases}$$

　結局，Friedrichs 展開は，上の A_δ, δC_δ の展開および z, f の δ に関する Taylor 展開によって完全に (数学的に) 正当化される．詳細は，T.Kano-T.Nishida [17] に譲って結論のみを書けば,

水面：

$n=0$ 上の (S_0),

$n=1$

$$(\mathrm{S}_1)\qquad \begin{cases} \bar\Phi^1_t+\bar\Phi^0_x\bar\Phi^1_x+\Gamma^1=\frac{1}{2}(\Gamma^0\bar\Phi^0_{xx})^2 \\ \Gamma^1_t+(\Gamma^0\bar\Phi^1_x+\Gamma^1\bar\Phi^0_x)_x=\frac{1}{3}\left((\Gamma^0)^3\bar\Phi^0_{xx}\right)_{xx} \end{cases}$$

等，$n\geq 1$ については非斉次線型双曲型方程式である．ただし，(S_n) は，Friedrichs 展開による (δ^{2n}) の項$=0$ とおいた方程式である．

内部：

$n=1$ は

$$\begin{cases} \Phi^1_t+\Phi^0_x\Phi^1_x+\Gamma^1=\frac{1}{2}(\Gamma^0)^2(\Phi^0_{xxt}+\Phi^0_x\Phi^0_{xxx}-(\Phi^0_{xx})^2) \\ \Gamma^1_t+(\Gamma^0\Phi^1_x+\Gamma^1\Phi^0_x)_x=\frac{1}{6}\left((\Gamma^0)^3\Phi^0_{xxx}\right)_x \end{cases}$$

等.

4.3. Friedrichs 展開 II (理論 2): 長い波

以上において Airy の近似理論—浅水波方程式は数学的にも正しいことがわかった．しかし J.Scott Russell の孤立波はどうなったのか？ G. G. Stokes の “長い波” はどうなったか？ 先ばしりして言えば，いわゆる “Stokes waves 理論” の数学的正当化は，1982 年，C.J.Amick-L.E.Fraenkel-J.F.Toland [1] によって示された．本稿ではこれ以上内容に入らないが，Airy, Russell の理論との関りを，一言だけ次に述べる．

Airy の浅水波は，水深 h と波長 λ との比を考え，“$\delta=\frac{h}{\lambda}$ が小” で特徴づけられるものとされた．紙数が尽きたので端折って結論を述べるが，“$\delta=\frac{h}{\lambda}$ 小” の波を “長い波”—水深より，波長の大きさに注目する—と観るか，“浅い水の波”—波長より，水深の相対的小ささに注目する—と観るか，は些か微妙である．Airy は水が浅いことに注意を払う．実は，Russell が見た波は“浅い水の波 ” であるのみならず，水深に比して波高 (振幅＝静水面と水面波とのへだたり) が小さい波である．すなわち $\epsilon=\frac{\alpha}{h}=\dfrac{\text{波高}}{\text{水深}}$ のパラメーターを導入した時,

“$\lambda\to\infty,\alpha\to 0$において $\epsilon=\frac{\alpha}{h}$ と $\delta^2=(\frac{h}{\lambda})^2$ が同じ位数の無限小”

という関係にある場合にはじめて Russell の孤立波が実現する，というのである．これらを“長い水面波 long waves of water surface” と呼ぼう．Airy 理論においては ϵ の大きさは 1 に近くてもよい．すなわち，浅水波は長い波を含むが，長い波は全てが浅水波ではない，のである．我々は [18],[19] においてこの事実を数学的に証明した.

G.G.Stokes は 1847 年，既に，[47] の §11 において，“$\frac{\lambda^2\alpha}{h^3}=\frac{\alpha}{h}/\frac{h^2}{\lambda^2}=\frac{\epsilon}{\delta^2}$ が小さい時” 我々が謂う Stokes waves が存在しうることを注意している．そして F.Ursell が, 1953 年，[52] において

$$(*)\qquad \frac{\epsilon}{\delta^2}\ll 1,\quad \sim 1,\quad \gg 1\quad \text{as}\quad \lambda\to\infty,\ \alpha\to 0$$

の各々に，Stokes waves, long waves そして shallow water waves が対応する筈だ，と述べたことが我々の探究を強く支えたのであった．Ursell は Lagrange 座標系にお

ける水面波方程式の解の形式的な展開を提唱し，数学的証明はない，としながらも，$(*)$ の区別の妥当性を強く示唆したのである．

我々は Euler 座標系において，Friedrichs 展開の数学的正当性の証明の上に，Ursell の主張の正しさを数学的に証明した．以下に，それを簡単に述べよう．ここから更に J.Boussinesq [4] が (Euler 方程式から) 導いた水面波の二次近似方程式

$$u_{tt} - ghu_{xx} = gh\left(\frac{3}{2h}u^2 + \frac{h^2}{3}u_{xx}\right)_{xx}$$

および 1895 年，Korteweg-de Vries [23]が導いた，同じく二次近似の方程式

$$u_t + 3uu_x + \frac{1}{3}u_{xxx} = 0$$

が共に，$\epsilon \sim \delta^2(\lambda \to \infty, \alpha \to 0)$ に対応する“長い水面波” の近似方程式であることを数学的に示すことができたのである．

さて，先に述べたようにAiry は，$\delta = \frac{h}{\lambda}$ 小，を考える．従って彼の方程式は $\{\Gamma, \bar{\Phi}_x\}$ についてのものである．今，我々は

$$\Gamma = h + \gamma$$

で定義される，静水状態からの水面の変化 γ に注目する．

$$\Gamma = h + \gamma = h(1 + \frac{\gamma}{h})$$

とかくと，先の無次元化 (3.6) において $\Gamma' = 1 + \frac{\gamma}{h}$ である．この γ を，波高 α によって $\gamma = \alpha\gamma'$ と無次元化すれば,

$$\Gamma' = 1 + \frac{\gamma}{h} = 1 + \frac{\alpha}{h}\gamma' = 1 + \epsilon\gamma'$$

と表わされる．今，$\lambda \to \infty$, $\alpha \to 0$ の時 $\epsilon \sim \delta^2$ である事実を，露骨に $\epsilon = \delta^2$ とおいてしまうと，

$$\Gamma' = 1 + \delta^2\gamma'$$

である．これに対応して無次元ポテンシャル Φ' から

$$\Phi' = -t + \delta^2\phi'$$

によって ϕ' を定義する．我々の方程式 (B.1)-(B.4) は “ ′ ” をとって，$\{\gamma, \phi\}$ に対応する次の方程式に帰着する：

(C.1) $\delta^2\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \in \Omega_1(t)$,

(C.2) $\phi_y = 0, \quad y = 0$,

(C.3) $\phi_t + \frac{\delta^2}{2}\phi_x^2 + \gamma + \frac{1}{2}\phi_y^2 = 0, \qquad y = 1 + \delta^2\gamma$,

(C.4) $\gamma_t + \delta^2\gamma_x\phi_x - \frac{1}{\delta^2}\phi_y = 0, \qquad y = 1 + \delta^2\gamma$,

ここに $\Omega_1(t) = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1 + \delta^2\gamma\}$.

前小節 4.3 の $[2^0]$, ($\sharp$) における $\psi = A_\delta \phi$ の δ^2 に関する展開を用いて，上の ϕ に対する $\Omega_1(t)$ の境界 $y = 1 + \delta^2\gamma$ における Dirichlet-Neumann map が，δ^2 に関して次の様な展開をもつことがわかる [18], [19]:

$$\begin{aligned}\phi_y|_{y=1+\delta^2\gamma} = -\delta^2\gamma^2\phi_{xx}|_{y=1+\delta^2\gamma} - \\ -\frac{\delta^4}{3}\gamma^2\{3(\gamma_x^2 + \gamma\gamma_{xx})\phi_{xx}|_{y=1+\delta^2\gamma} + 6\gamma\gamma_x\phi_{xxx}|_{y=1+\delta^2\gamma} + \\ + \gamma^2\phi_{xxxx}|_{y=1+\delta^2\gamma}\} + O(\delta^6),\end{aligned}$$

ここに $O(\delta^6)$ 等は，解析函数の空間に適当なノルムを入れた Banach 空間における評価である．これより (C.3)-(C.4) は，$O(1)$ の一次近似として

$$\phi^0_{tt} - \phi^0_{xx} = 0 \quad \text{または} \quad \gamma^0_{tt} - \gamma^0_{xx} = 0$$

を与えることがわかる [18]．これは Lagrange が「解析力学」第 2 巻で無限小振幅の振動に対して導いた一次近似方程式であるが，Friedrichs 展開はそれが，有限振幅の小さな波の一次近似たることを保証したのである．

これより更に，我々は Boussinesq 方程式

$$\begin{cases}\phi^0_{tt} - \phi^0_{xx} - \frac{\delta^2}{2}\phi^0_{ttxx} + \frac{\delta^2}{6}\phi^0_{xxxx} - 3\delta^2\phi^0_x\phi^0_{xx} = 0 \\ \gamma^0 = -\phi^0_t + \frac{\delta^2}{2}\phi^0_{txx} - \frac{\delta^2}{2}(\phi^0_x)^2\end{cases}$$

を二次近似として得た [18],p.401．これは精確な計算で，もしそこに “粗い近似”(一次近似)

$$\phi^0_{ttxx} = \phi^0_{xxxx} + O(\delta^2)$$

を用いると，もともとの Boussinesq 方程式 (1871) を得る．これらは全て水面 $y = 1+\delta^2\gamma$ における計算である．更に $\bar{\phi} = \phi(t, x, 1 + \delta^2\gamma; \delta)$ によって

$$f(t) = \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\phi}_x), \quad g(t) = \frac{1}{2}(\gamma - \bar{\phi}_x)$$

で f, g を定義するとき，初期値 $\{\gamma, \bar{\phi}_x\}(0, x)$ が

$$f(0) = O(1), \quad g(0) = O(\delta^2)$$

をみたす水面波は，(C.3)-(C.4) から

$$f_t + f_x + \frac{3}{2}\delta^2 ff_x + \frac{\delta^2}{6}f_{xxx} = O(\delta^4)$$

または

$$g_t - g_x - \frac{3}{2}\delta^2 gg_x - \frac{\delta^2}{6}g_{xxx} = -\delta^2(\frac{1}{2}ff_x + f_{xxx}) + O(\delta^4)$$

をみたすことがわかる．すなわち $O(\delta^4)$ の誤差で，KdV 方程式が長い水面波の二次近似方程式を与えることが示された [18].

こうして Airy-Russell の，Stokes を巻込んでの論争は一定のカタがついたのである．ことは，解は解析函数であり，存在時間が局所的であるという，ある意味では致命的弱点にある，としても．

5. 結論

前小節·前々小節で論じた水面波に対する Friedrichs 展開の数学的正当性の証明を経て，我々は次の事柄を知った：

(1^0) 無次元化によって方程式に導入された無次元パラメータに関し，方程式および解が漸近展開をもつこと（この様にパラメータに関する無限回微分可能性が証明されることは稀である）.

(2^0) 展開の各レベル $O(\delta^{2n})$ に応じて得られる“近似方程式”達は，(i) 線型波動方程式，(ii) 浅水波方程式，(iii) soliton 解をもつ (時間について) 二階の方程式：Boussinesq 方程式, (iv) KdV 方程式, (v) “ Stokes の極大波方程式,” 等を含むこと．これによって，史上個々に発見されてきた水面波に関わる様々の方程式の間の内的連関が明らかにされたこと．

(3^0) 水面波方程式は同時に，上の事実によって，水面波がこれらの方程式のいわば “非線型重畳”によって記述されることを示していること．

しかし，浅水波の如くたとえ無限個の双曲型方程式の“非線型重畳”によって記述される波を含むとしても，水面波方程式がもともと双曲型であるかどうかは，全然自明でない．むしろ，元来は楕円型方程式（ポテンシャル方程式）の初期値–境界値問題が，楕円性が退化するパラメータの critical な値のまわりで対蹠的ともいうべき双曲型方程式で近似されるという，非線型問題の特異摂動を与えているというところに問題の本質があるとみられること．

(4^0) こうして，“正しい微分方程式”たるものがいかに豊かな内容をもち，かつ一種の synthèse として，はからずも，うちたてられているものであることを如実に示す一例として，水面波に対する Euler 方程式があること—ここにこそ J.Leray が謂う les problèmes qui se posent の挑戦がみられるというべきではないか.

注意

上では三次元流の水面波は一切論じなかったし，解析的でない解の存在についてもふれなかった．前者については，二次元版の KdV 方程式（KP方程式）が三次元流の長い水面波の二次近似（二次元流で KdV 方程式が果たす役割）であることがわかっている [20]．後者については，Nalimov [31], Yosihara [54], [55] および W.Craig [8] の Sobolev 空間での解が知られていることを注意しておこう．また S.Mikiは修士論文[9] (1997,2) で, Lagrange座標系における Friedrichs展開の正当性を示した．解析函数解に対するこの仕事が Yosihara-Craigの仕事と結びつく事を期待したい。なお筆者の一人の手になる，solitary wave に関し歴史的·論理的に 150 年間を振返った一稿 [21] があり，併せて供覧にいれたい.

[9]附録二を参照

附録一　双曲型方程式系について

西谷達雄　　　鹿野忠良

1.　双曲性に関わる修士論文を書いた著者の一人は，波打際に「ミイラを捜しに」いき，「自らミイラとなって」水面波に関する一，二の論文に手を染めた．

水面波に関する Friedrichs 展開が，いわゆる浅水波の双曲型方程式系[10]の解による漸近展開を与えること，しかも，にも拘わらず，浅水波自体が双曲型方程式によって記述されるか否かは必ずしもわからないこと—すでに述べたとうりである．Friedrichs 展開の第一項，Airy がすでに 1848 年発見していた方程式を歴史的に浅水波方程式とよびならわしているが，今いう浅水波は，本文に述べた様に $\delta=\frac{h(\text{水深})}{\lambda(\text{波長})}$ が大きくない波を指す．

然るに，Nalimov-Yosihara の研究は，Lagrange 座標系において水面波方程式を解こうとすれば，いわゆる弱双曲系に対する Cauchy 問題の適切性が本質的主題として立現われてくることを示した．Yosihara [54] は[11] は未知函数 (ベクトル) の適切な採方から，Lagrange 座標系による (二次元) 水面波方程式を以下の様に準線型弱双曲型方程式に帰着させた：

水面 $\Gamma_s(t): y-\gamma=0$, 速度 $U={}^t(u,v)$, 圧力 $p=p_0-y$ (p_0 定数，重力加速度$=1$ に正規化), とするとき

$$\gamma=0,\quad U=0,\quad p=p_0-y$$

に近い (水面波の) 非定常解を求める問題を，Lagrange 座標 $X(t,x)={}^t(X_1(t,x),X_2(t,x))$ によって，次の様に定式化する：

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+X(0,x)\in\Gamma_s(0),\quad x\in\mathbb{R}^1\\ \frac{\partial}{\partial t}(\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+X(t,x))=U(t,\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+X(t,x))=U(t,x+X_1,X_2)\end{cases}$$

方程式 (A.4) は $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+X(t,x)\in\Gamma_s(t),t>0$ を示し，(A.3) は

$$X_{tt}=U_t+(U\cdot\nabla)U=-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\nabla p;$$

水面での大気圧一定は

$$p(t,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+X(t,x))=p_0;$$

[10]§4.3 に述べた水面における Friedrichs 展開は，展開係数 $\{\Phi^n,\Gamma^n\}$ に対する主要部

$$\{\frac{\partial}{\partial t}+\begin{pmatrix}\Phi_x^0 & 1\\ \Gamma^0 & \Phi_x^0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\}\begin{pmatrix}\Phi_x^n\\ \Gamma^n\end{pmatrix}$$

をもつ，$n\geq 0$, すなわち，$\Gamma^0>0$ である限り §4.4 末尾にいう (S_n) は，狭義双曲型である．

[11]吉原英昭は [54] の出版後，この内容を全面的に書改めた．彼はこの改稿を出版しなかったが，この版の方がわかりやすい：Yosihara [54], [55], §5.1.

これを x で微分して，

$$\nabla p = -X_{tt} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に注意すれば水面 $\Gamma_s(t)$ 上の方程式は

$$(1 + X_{1x})X_{1tt} + X_{2x}(1 + X_{2tt}) = 0.$$

次に Dirichlet-Neumann map に相当する作用素 K をもちいて，結局，水面での方程式

$$(\sharp) \qquad \begin{cases} (1 + X_{1x})X_{1tt} + X_{2x}(1 + X_{2tt}) = 0 \\ X_{2t} = KX_{1t}, \quad 0 \le t \le T \\ X(0,x) = X^{(0)}(x), \quad X_{1t}(0,x) = X_1^{(1)}(x) \end{cases}$$

を解く問題が，我々の (A.3)-(A.6) に対応する Lagrange 座標版である．

次に

$$Y = X_{tt},\ Z = X_x,\ W = {}^t(X, Y, Z),\ W' = {}^t(X, Y_1)$$

によって未知函数 (ベクトル) の変換をすると，上の ($\sharp$) は，準線型方程式系

$$(\sharp\sharp) \qquad \begin{cases} X_{tt} = Y \\ Y_{1tt} + a|D|Y_1 = f_1 \\ Y_{2t} = f_2 \\ Z_{1t} = f_3 \\ Z_{2t} = f_4 \end{cases}$$

に帰着される．ここに $f = f(W, W_t') = (f_1, f_2, f_3, f_4)(W, W_t')$, で，$a|D|$ は一階の特異積分作用素である．

この変形 ($\sharp$) $\to$ ($\sharp\sharp$) は本質的であり，これと非線型項 f の性質および，a が原理的に positive であることを示すことが，Yosihara の仕事である．西田 [37], §3 の美事な解説が示すように，Lagrange 座標による水面波方程式の記述そのものが，Y_1 に対する方程式を，いわゆる Levi 条件をみたす弱双曲型方程式

$$(*) \qquad Y_{1tt} + a|D|Y_1 = 0, \quad a > 0$$

を線型部分とする方程式に帰着せしむるのである．勿論，存在定理のために $\{f_j\}$ の性質を調べ評価を与えることは，もう一つの難業である．

こうして，弱双曲型方程式 ($*$) に対する Cauchy 問題の Sobolev 空間での適切性から，Nalimov-Yosihara による Sobolev 空間における水面波方程式の解が得られた．

2. 弱双曲系については，蓄積された研究のうちから，著者の一人による一、二の文献をあげるにとどめ[12]，更に拡がった展望において Friedrichs の双曲系とくに対称双曲型偏微

[12] Nishitani [N]

分方程式系[13] について，基本的な結果を若干述べておこう．以下で，対称双曲系に対する初期値問題を考え，これが低階によらず，すなわち，任意の低階に対して C^∞ 函数族の中で一意可解となることを見よう．

次の一階の微分方程式系を考える：

$$Lu = \sum_{j=0}^{n} A_j(x)\partial_j u + B(x)u = f$$

ここで，$A_j(x)$, $B(x)$ は $N \times N$ 行列で，その成分は $x = (x_0, x_1, ..., x_n) = (x_0, x') \in \mathbb{R}^{n+1}$ の C^∞ 函数であり，$u = (u_1, ..., u_N)$ また $\partial_j = \partial/\partial x_j$ である．$A_j(x)$ が対称行列（複素数値ならエルミート）であり，$A_0(x)$ が定値である時，L は超曲面（この場合は平面）$x_0 =$ 定数 に関して対称双曲系である，と呼ばれる．この L に対して次の問題，すなわち初期値問題を考える：$x_0 < a$ で 0 となる f が与えられたとき

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in} \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ u = 0 & \text{in} \quad x_0 < a \end{cases}$$

を満たす u を求めよ．以下簡単のため，$A_j(x)$, $B(x)$ はそれ自身のみならず全ての導函数が $\mathbb{R}^{n+1}$ で有界と仮定する．

L の代わりに $-L$ を考えることによって $A_0(x)$ は正定値と仮定できる．更に $A_0(x)^{-1/2}LA_0(x)^{-1/2}$ を考えれば，$A_0(x) = I$，単位行列，としてよい．（L に対する一意可解性と $A_0(x)^{-1/2}LA_0(x)^{-1/2}$ に対する一意可解性は同値であるから）解を $e^{\lambda x_0}u$ の形で求めるとすると

$$L(e^{\lambda x_0}u) = e^{\lambda x_0}(L+\lambda)u$$

であるから

$$\begin{cases} (L+\lambda)u = f & \text{in} \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ u = 0 & \text{in} \quad x_0 < a \end{cases}$$

なる u を求めると $e^{\lambda x_0}u$ は $Lw = e^{\lambda x_0}f$ の解になっている．最初に基本的な不等式を導いておく．$\Omega = (T_1, T_2) \times \mathbb{R}^n$ に対して Green の公式を思い出す：

$$\begin{aligned} ((L+\lambda)u, v)_{L^2(\Omega)} &= (u, (L^*+\lambda)v)_{L^2(\Omega)} \\ &+ (u(T_2), v(T_2))_{L^2(\mathbb{R}^n)} - (u(T_1), v(T_1))_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

が任意の u, $v \in C_0^1(\bar{\Omega})$ に対して成立する．ここで

$$L^* = -\sum_{j=0}^{n} \partial_j A_j^*(x)u + B^*(x)u$$

である．ところで $A_j(x)^* = A_j(x)$ であったから

$$L^* = -L + Z(x), \quad Z(x) = -\sum_{j=0}^{n} \partial_j A_j(x) + B^*(x) - B(x)$$

[13]Friedrichs [F2]

である．さて $u=v$ として

$$2\operatorname{Re}((L+\lambda)u,u)_{L^2(\Omega)} = 2\lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ - \|u(T_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \operatorname{Re}(u, Z(x)u)_{L^2(\Omega)}.$$

Cauchy-Schwarz の不等式から

$$|\operatorname{Re}(u,Zu)_{L^2(\Omega)}| \le C\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$
$$|\operatorname{Re}((L+\lambda)u,u)_{L^2(\Omega)}| \le \|(L+\lambda)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

従って

$$(2\lambda - C_1)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \\ \le \|(L+\lambda)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が従う．全く同じ議論から

$$(2\lambda - C_1)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \\ \le \|(L^*+\lambda)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

を得る．まとめると

補題 1.1: $u \in C^1_0(\mathbb{R}^{n+1})$ とするとき次が成立する．

$$(2\lambda - C_1)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \\ \le \|(L+\lambda)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.1}$$

$$(2\lambda - C_1)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \\ \le \|(L^*+\lambda)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(T_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2}$$

ただし $\Omega = (T_1, T_2) \times \mathbb{R}^n$ である．

さて次の空間 $E \subset L^2(\mathbb{R}^{n+1})$

$$E = \{(L^*+\lambda)\psi \mid \psi \in C^1_0(\mathbb{R}^{n+1})\}$$

と写像 F を考える:

$$F : E \ni (L^*+\lambda)\psi \mapsto (f,\psi)_{L^2(\Omega)}.$$

まず補題 1.1 からこの写像は well-defined である．なぜなら $(L^*+\lambda)\psi = (L^*+\lambda)\tilde{\psi}$ とすると補題 1.1 において $T_1 \to -\infty, T_2 \to +\infty$ として

$$(2\lambda - C_1)\|\psi - \tilde{\psi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \le \|(L^*+\lambda)(\psi - \tilde{\psi})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

が従い $\psi = \tilde{\psi}$ となって well-defined である．E は $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ の部分空間（一般に閉ではない）であるから Hahn-Banach の定理によって F は $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ 上の線型汎函数 $\tilde{F}$ に拡張される．

$$|F((L^*+\lambda)\psi)| = |(f,\psi)| \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \le \\ \le (2\lambda - C_1)^{-1}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\|(L^*+\lambda)\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

であったから，拡張された $\tilde{F}$ は

$$|\tilde{F}(w)| \le (2\lambda - C_1)^{-1}\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

を満たすとしてよい．次に Riesz の定理から $u \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ があって

$$\tilde{F}(\psi) = (u, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}, \quad \forall\psi \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$$

が成立する．またこの u は

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \le (2\lambda - C_1)^{-1}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

を満たすとしてよい．さて $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{F}((L^* + \lambda)\psi)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} = F((L^* + \lambda)\psi)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} = \\ = (f, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} = (u, (L^* + \lambda)\psi)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\end{aligned}$$

であるからこの式は $(L+\lambda)u = f$ が超函数の意味で成立していることを示している．

次に f が $x_0 \le a$ で零ならば u もそこで零であることをみる．そのために次の補題を用意する．

補題 1.2: $u \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$, $(L+\lambda)u \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ とする．このとき，$u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ で

$$u_n \to u, \quad (L+\lambda)u_n \to (L+\lambda)u \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^{n+1})$$

なる列 u_n が存在する．

今この補題を認めると，まず補題1.1 から

$$(2\lambda - C_1)\|u_k\|^2_{L^2((T_1,a)\times\mathbb{R}^n)} \le \|(L+\lambda)u_k\|^2_{L^2((T_1,a)\times\mathbb{R}^n)} + \|u_k(T_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

ここで，$T_1 \to -\infty$ とすると

$$(2\lambda - C_1)\|u_k\|^2_{L^2((-\infty,a)\times\mathbb{R}^n)} \le \|(L+\lambda)u_k\|^2_{L^2((-\infty,a)\times\mathbb{R}^n)}$$

を得る．次に $k \to \infty$ とすると補題1.2 から

$$(2\lambda - C_1)\|u\|^2_{L^2((-\infty,a)\times\mathbb{R}^n)} \le \|(L+\lambda)u\|^2_{L^2((-\infty,a)\times\mathbb{R}^n)}$$

が従う．従って f が $x_0 \le a$ で零ならば u もそこで零である．

次に補題1.2 の証明の要点を述べる．証明には Friedrichs の軟化子を用いる．$\rho(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ を，$\rho(x) \ge 0$ で $\int \rho(x)dx = 1$ なる函数とし

$$\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-(n+1)}\rho(x/\epsilon)$$

とおく．今

$$u_\epsilon(x) = \rho_\epsilon * u = \int \rho_\epsilon(x-y)u(y)dy$$

とおくとこの u_ϵ が求めるものである．なぜなら

$$L(\rho_\epsilon * u) - \rho_\epsilon * (Lu) \to 0 \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^{n+1})$$

であり他方 $\rho_\epsilon * ((L+\lambda)u) \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ でもあるから[14]，$(L+\lambda)u_\epsilon \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ が従う．

このようにして存在を示した $u \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ が $f \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ が滑らかならば u もそうであることを示そう．滑らかさは L^2 微分で測るので，Sobolev 空間の定義を思い出しておく．

定義 1.1:

$$H^s(\mathbb{R}^{n+1}) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}) \mid \xi^s \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})\}$$

ただし $\xi^2 = 1 + |\xi|^2$ で $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の緩増加超函数の全体，また $\hat{u}(\xi)$ は u の Fourier 変換，即ち

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n-1} \int e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx$$

である．

$H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ にノルムを

$$\|u\|_s = \|\xi^s \hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

で導入する．ここでは H^s の他の特徴づけを利用するので次の δ に依存したノルムを用意しておく．

$$\|u\|_{(s-1),\delta}^2 = (2\pi)^{-n-1} \int |\hat{u}(\xi)|^2 \xi^{2s} \delta \xi^{-2} d\xi$$

ここで $u \in H^{s-1}$ のときには，$\|u\|_{(s-1),\delta}$ は $\delta \neq 0$ のとき $\|u\|_{s-1}$ と同値であることは明らかである．また

$$\|u\|_{(s-1),\delta} \uparrow \|u\|_s \quad \delta \downarrow 0$$

が成立．従って $u \in H^{s-1}$ が実は $u \in H^s$ であることを示すには

$$\|u\|_{(s-1),\delta} \leq C$$

なる $0 < \delta \leq 1$ に無関係な C の存在することを示せばよい．

元の問題に戻って，$f \in H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ のとき $u \in H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ であることを示そう．少し特殊化された軟化子を使う．次のような $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ をとってくる．

$$\hat{\chi}(\xi) = O(|\xi|^k), \quad \xi \to 0 \tag{1.3}$$

$$\hat{\chi}(t\xi) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \xi = 0 \tag{1.4}$$

以前と同じく，$\chi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n-1}\chi(x/\epsilon)$ とおく．次の補題を認める[15]．

---

[14] Friedrichs [F1]

[15] [HoO] の 2 章の定理 2.4.1 を見よ

補題 1.3: (1.3) と (1.4) が $s<k$ で成立しているとする．このとき δ に無関係な C_1, C_2 があって

$$C_1\|u\|^2_{(s-1),\delta} \le \int_0^1 \|u*\chi_\epsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\epsilon^{-2s}(1+\frac{\delta^2}{\epsilon^2})^{-1}\frac{d\epsilon}{\epsilon}+ \\ +\|u\|^2_{s-1} \le C_2\|u\|^2_{(s-1),\delta}, \quad u\in H^{s-1}$$

が $0<\delta\le 1$ に対して成立する．

次に補題 1.1 を少し拡張しておく．

補題 1.4: $u\in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$, $(L+\lambda)u\in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ とするとき次が成立する．

$$(2\lambda - C_1)\|u\|^2 \le \|(L+\lambda)u\|^2, \quad (2\lambda - C_1)\|u\|^2 \le \|(L^*+\lambda)u\|^2.$$

記号を見やすくするため $\chi * u = J_\epsilon u$, $\|u\| = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$ と書くことにする．$J_\epsilon(L+\lambda)u = J_\epsilon f$ から

$$(L+\lambda)J_\epsilon u = J_\epsilon f + [L, J_\epsilon]u \tag{1.5}$$

である．ここで $[L, J_\epsilon] = LJ_\epsilon - J_\epsilon L$ である．

なぜなら，$u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ のときは正しく（補題1.1 で $T_1\to-\infty, T_2\to+\infty$ とする）補題1.2 によって両辺とも $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ で近似（ $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ のノルムで）できるからこの補題の成立することが分かる．

さて (1.5) と補題1.4 から

$$(2\lambda - C_1)\|J_\epsilon u\|^2 \le C'\|J_\epsilon f\|^2 + C''\|[L, J_\epsilon]u\|^2 \tag{1.6}$$

が従う．ここで

$$\int_0^1 \|[J_\epsilon, L]u\|^2\epsilon^{-2s}(1+\frac{\delta^2}{\epsilon^2})^{-1}\frac{d\epsilon}{\epsilon} \le C_3\|u\|^2_{(s-1),\delta}, \quad u\in H^{s-1}$$

に注意する[16]．C_3 は $0<\delta\le 1$ に無関係な定数である．(1.6) に $\epsilon^{-2s}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}1/\epsilon$ を乗じて ϵ で $[0,1]$ 上積分すると

$$\begin{aligned}(2\lambda - C_1)\int_0^1 \|J_\epsilon u\|^2\epsilon^{-2s}(1+\frac{\delta^2}{\epsilon^2})^{-1}\frac{d\epsilon}{\epsilon} \\ \le C'\int_0^1 \|J_\epsilon f\|^2\epsilon^{-2s}(1+\frac{\delta^2}{\epsilon^2})^{-1}\frac{d\epsilon}{\epsilon} + C'''\|u\|^2_{(s-1),\delta}\end{aligned} \tag{1.7}$$

を得る．(1.7) に $(2\lambda - C_1)\|u\|^2_{s-1}$ を加えて補題1.3 を適用すると，λ を適当に大きくとることによって

$$C_1\lambda\|u\|^2_{(s-1),\delta} \le \|f\|^2_s + C_3\|u\|^2_{(s-1),\delta} + C_4\lambda\|u\|^2_{s-1}$$

[16] 上出，[HoO], 2 章の定理 2.4.2

が従う．ゆえに

$$(C_1\lambda - C_3)\|u\|^2_{(s-1),\delta} \le C_2\|f\|^2_s + C_4\lambda\|u\|^2_{s-1}.$$

$s=1$ から始めて，$f \in H^1$ なら $u \in H^1$．以下帰納的に，$f \in H^s$ なら $u \in H^s$ が従う．

まとめると，任意の $s \in \mathbb{R}_+$ に対して λ_s があって，$\lambda > \lambda_s$ ならば $f \in H_s$ のとき

$$\begin{cases} (L+\lambda)u = f \\ u = 0, \quad x_0 < a \end{cases} \tag{1.8}$$

なる $u \in H^s$ が存在する．また前に述べたように

$$L(e^{\lambda x_0}u) = e^{\lambda x_0}f$$

である．

命題 1.5: $e^{-\lambda x_0}f \in H^s(\mathbb{R}^{n+1})$, $(\lambda > \lambda_s)$ で f は $x_0 < a$ で零とする．このとき $e^{-\lambda x_0}u \in H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ なる u で

$$Lu = f$$

を満たし，$x_0 < a$ では零となる u が存在する．

Sobolev の埋め込み定理によると $s > [(n+1)/2]+k$ ならば $H^s(\mathbb{R}^{n+1}) \subset C^k(\mathbb{R}^{n+1})$ であるから $e^{-\lambda x_0}u \in C^k(\mathbb{R}^{n+1})$ となって $u \in C^k(\mathbb{R}^{n+1})$　である．

解の一意性について少し注意しておく．$L+\lambda$ に対しておこなったのと全く同じ議論を繰り返すことによって次のような λ_s の存在がいえる： $f \in H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ で $x_0 > a$ では $f=0$ であるとする．このとき $\lambda > \lambda_s$ ならば

$$\begin{cases} (L^*+\lambda)u = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ u = 0 \quad \text{in} \quad x_0 > a \end{cases} \tag{1.9}$$

を満たす $u \in H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ が存在する．これより (1.8) の解の一意性が次のようにして示される．$b > a$ なる b を任意にとって固定する．また $g \in H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ を任意に与える．$v \in H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ を f を g にとったときの (1.9) の解とする．Green の公式を $(a,b)\times\mathbb{R}^n$ で適用すると ($s \ge 1$ なら Green の公式が成立することをみるのは容易である) u が (1.8) の $f=0$ に対する解のとき

$$0 = ((L+\lambda)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} = (u, (L^*+\lambda)v)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} = (u,g)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

ところで，g は任意であったから，$u=0$ in Ω．また b も任意であったから $u=0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ を得る．

Added　references

[F1] K.O.Friedrichs: The identity of weak and strong extensions of differential operators, Trans. Amer. math. Soc. 55 (1944), 132-151.

[F2] K.O.Friedrichs: Symmetric hyperbolic linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 345-392.

[HoO] L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 1963.

[N] T.Nishitani: Local energy integrals for effectively hyperbolic operators I,II, J. Math. Kyoto Univ. 24 (1984), 623-658 and 659-666.

附録二　Lagrange 座標系に於る水面波に対する Friedrichs 展開

三木沙絵　　　鹿野忠良

1.　以下では, 本文に詳しく論じた Friedrichs 展開を Lagrange 座標系に於て取扱う. 理論は既にひとたび (Euler 座標系に於て) 構成されている [17],[18]. それを敢えて再び Lagrange 座標系に於て取り上げるのは二つの理由による.

(1)　偏微分方程式論の観点から：Euler 座標系に於ては，連続の方程式 $\Delta\Phi=0$, Φ は速度ポテンシャル, に対する帯状領域に於る内部および境界評価が本質的である．今は，存在定理のために必要な a priori 評価は，非線型楕円型方程式系に対して求められる．これは決してやさしい事ではない．それを巧にきりぬけるのである．

実際には，我々はまず Shinbrot [45]にならって，問題の非線型楕円型方程式系に対する評価を，無限個の非斉次線型楕円型方程式系に対する評価でおきかえる．その結果，非線型性に原因する評価の難しさは，上の無限列に対する評価の重畳の収束性の証明に転移されるのである．この点について我々は Shinbrot に負うこと，きわめて大きい．しかし我々は彼の idea を，無次元パラメータ δ に関する一様評価として実現しなければならない．ここに偏微分方程式論としてあえて Lagrange 座標系でやりなおす事の意味がある．

(2) 数理物理の観点から：Shinbrot の理論も我々の理論も，共に解析函数のクラスで成立ものである．しかし数理物理的にいえば，理論はもっとゆるやかな條件下で，　すなわちなめらかな函数の枠組で，たとえば Sobolev 空間で成立ことがのぞましいのである．しかし，Euler 座標系での Friedrichs 展開を Sobolev 空間で実現するのは仲々難しそうである．存在定理自体知られていないからである．ひるがえって Lagrange 座標系に於て我々は Nalimov [31] ,Yosihara [54],[55] の定理を知っている．Sobolev 空間に於る水面波の存在定理である．ここから，Friedrichs 展開の数学的正当性への径は近くないが，存在定理さえない Euler 座標系 におけるより希望が大きいと考えるのはあながち妄想的とはいわれない.

すくなくとも解析函数の枠組に於てなら Lagrange 座標系に於ても Friedrichs 展開の正当性も証明出来る，というのが我々の結果であり，目標にむかっての一歩であろう，というのである.

2. 方程式（二次元流）

非圧縮的非粘性流体 = 水が，平らな底をもつ領域

$$\Omega_0 = \{(\xi, \eta) : 0 < \eta < h\,(t, \xi)\}\,, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

を満たしている時，水面波の方程式は次の通りである，但　外力は重力のみとする：

$$x_{tt} x_\xi + (y_{tt} + g)\, y_\xi + \frac{p_\xi}{\rho} = 0 \tag{2.2}$$

$$x_{tt} x_\eta + (y_{tt} + g)\, y_\eta + \frac{p_\eta}{\rho} = 0 \tag{2.3}$$

は運動方程式で，

$$x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1 \tag{2.4}$$

が連続の方程式であり，${}^t\,(x(t, \xi, \eta), y(t, \xi, \eta))$ は初期時刻 $t = 0$ に於て (ξ, η) にあった水の $t = t$ に於る位置を表す函数である．すなわち，初期条件：

$$x(0, \xi, \eta) = \xi \tag{2.5}$$

$$y(0, \xi, \eta) = \eta \tag{2.6}$$

$$x_t(0, \xi, \eta) = x^1(\xi, \eta) \tag{2.7}$$

$$y_t(0, \xi, \eta) = y^1(\xi, \eta) \tag{2.8}$$

を課する．$p = p(t, \xi, \eta)$ は圧力で，ρ は密度であるが，ここでは $\rho(t, \xi, \eta) =$ 定数としてある．g は重力加速度である．

水面 $\eta = h(t, \xi)$ と，水底 $\eta = 0$ では境界条件が課せられるが，

(イ)　水面での大気圧一定，の条件から

$$p(t, \xi, h) = 0 \tag{2.9}$$

(ロ)　水底に吸込，湧出なし，の条件から

$$y(t, \xi, 0) = 0 \tag{2.10}$$

(ハ)　水面の方程式

$$x_{tt} x_\xi + (y_{tt} + g) y_\xi = 0, \quad \eta = h(t, \xi) \tag{2.11}$$

が成立．

我々は (2.7) - (2.8) を与えることによって $0 < \eta \leq h(t, \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ に対する $\{x(t, \xi, \eta), y(t, \xi, \eta)\}$ を求めるのである．

3. 問題

(2.1) - (2.11) を無次元化する．無次元変数 $(t', \xi', \eta', x', y', p')$ を次で定義する：

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \xi = \bar{\lambda}\xi',\ \eta = \bar{h}\eta',\ t = \dfrac{\bar{\lambda}}{\sqrt{g\bar{h}}}t' \\ x = \bar{\lambda}x',\ y = \bar{h}y',\ p = \rho g\bar{h}p' \end{cases}$$

ここに $\bar{\lambda}$：波長のスタンダード，$\bar{h}$：平均水深であり，$c = \sqrt{g\bar{h}}$ は音速のスタンダードである．ところで，本稿では $h(0,\xi) = \bar{h}$ の　"the simplest case "(Shinbrot) を論じる．

<u>注意</u>　初期水面 $\eta = h(0,\xi) = \gamma(\xi)$ の場合への一般化については，T.Kano - S.Miki の論文[17] を参照のこと．

従って無次元化 (3.1) によって我々の問題は次の様になる．但，簡単のため，無次元変数の "′" をとって，それ等を改めて (t, ξ, η, x, y, p) と書く．

$$\Omega = \left\{(\xi,\eta) : \xi \in \mathbb{R}^1, 0 < \eta < 1\right\}$$

を水が満しており

$$(3.2)\qquad \begin{cases} x_{tt}x_\xi + (\delta^2 y_{tt} + 1)y_\xi + p_\xi = 0 \\ x_{tt}x_\eta + (\delta^2 y_{tt} + 1)y_\eta + p_\eta = 0 \end{cases}$$

$$(3.3)\qquad x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1$$

但　$\delta = \bar{h}/\bar{\lambda}$.
初期条件：

$$(3.4)\qquad \begin{cases} x(0,\xi,\eta) = \xi \\ y(0,\xi,\eta) = \eta \\ x_t(0,\xi,\eta) = x^1(\xi,\eta) \\ y_t(0,\xi,\eta) = y^1(\xi,\eta) \end{cases}$$

境界条件：

$$(3.5)\qquad p(t,\xi,1) = 0$$

$$(3.6)\qquad y(t,\xi,0) = 0$$

[17][K-M]：　T.Kano - S.Miki: Friedrichs expansion for water surface waves in Lagrangian coordinates, I,II.

そして $\eta = 1$ で，水面の方程式：

$$x_{tt}(1)x_\xi(1) + (\delta^2 y_{tt}(1) + 1)y_\xi(1) = 0, \tag{3.7}$$

但　$x_{tt}(1) = x_{tt}(t, \xi, 1)$, etc.

[1]　我々の問題は
　(1^0) (ξ, η) の実解析函数 $\{x^1(\xi, \eta), y^1(\xi, \eta)\}$ を与えた時，(3.1) - (3.7)
　の (t, ξ, η) の実解析函数である解が，少くとも十分小な $t_0 > 0$ をとれば，
　$|t| \le t_0$ に対して存在すること，
　(2^0)　上の解は δ に関して無限回微分可能，
を示す事にある．

[2]　そのためには，(1^0) の存在定理を得るための a priori 評価が全て $\delta \in [0, 1]$ に一様に成立する事を示すのが本質的である．

[3]　例．　F.Ursell は[52] に於て次の様に議論している．必ずしも意味を判然させない small parameters $\epsilon, \delta > 0$ を導入して $\{x(t, \xi, \eta), y(t, \xi, \eta)\}$ に対し下の展開を仮定する (証明は出来てない)，但ここの δ は我々のと異り，(波高/水深) と同じオーダーだとしている：

$$\begin{cases} x = \xi + \delta\epsilon^{-1/2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \eta^{2n} x_{2n}(A, T; \epsilon, \delta) \\ y = \eta + \delta \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \eta^{2n+1} y_{2n+1}(A, T; \epsilon, \delta) \end{cases} \tag{3.8}$$

但　$A = \sqrt{\epsilon}\xi$, $T = \sqrt{\epsilon}t$. いくつかの条件の下，Ursell は

$$\frac{\delta}{\epsilon} \sim \frac{\bar{a}\bar{\lambda}^2}{h^3}, \quad \bar{a} : \text{波高のスタンダード} \tag{3.9}$$

を仮定し，$\epsilon \downarrow 0$ における無限小としての δ と ϵ との関係に対応して以下の三種の異なる構造の波があり得べきものであるという．

i) $\delta \ll \epsilon$ の時：
$O(\epsilon^2)$ の誤差による一次近似：$\gamma = -\delta h \frac{\partial x_0}{\partial A}, A = \sqrt{\epsilon}\xi$, に対し，

$$\gamma_{tt} - gh\gamma_{\xi\xi} = gh(\frac{h^2}{3}\gamma_{\xi\xi})_{\xi\xi},$$

(Stokes の二次近似，linear long waves [47]).

ii) $\delta = \epsilon$ の時：

$$\gamma_{tt} - gh\gamma_{\xi\xi} = gh(\frac{3}{2h}\gamma^2 + \frac{h^2}{3}\gamma_{\xi\xi})_{\xi\xi},$$

(Boussinesq　方程式).

iii) $\delta \gg \epsilon$ の時：

$$\gamma_{tt} - gh\gamma_{\xi\xi} = gh(\frac{3}{2h}\gamma^2)_{\xi\xi},$$

(Shallow water waves).

我々は先に，Euler 座標系において，この議論が正しいことを示した[18]. Ursellの議論の数学的正当性は我々の，別途の論文[18]で論ずるが，iii) についてコメントしておこう．我々の結論を手荒くまとめると，iii) に相当する波，すなわち

$$\frac{\delta}{\epsilon} \cong \frac{(\frac{\bar{a}}{h})}{(\frac{h}{\bar{\lambda}})^2} \to \infty, \quad \text{as} \quad \bar{\lambda} \to \infty,$$

が示すように波長に応じて波高が小さいとは限らぬ波＝浅水波は，一次近似方程式

$$x_{tt} - \frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi} = 0$$

を持つ．X を $x = \xi + X(t,\xi)$ で定義すれば，我々が得る存在定理は $|||X_\xi|||$ 小であり，この時，上の方程式は

$$X_{tt} - \frac{X_{\xi\xi}}{1 + X_\xi} = 0$$

となるが，$(1+X_\xi)^{-1} \approx 1 - X_\xi$ で近似すると

$$X_{tt} - (1 - X_\xi)X_{\xi\xi} = 0.$$

結局，$\xi \to -\xi$ でおきかえた時

$$X_{tt} - X_{\xi\xi} - X_\xi X_{\xi\xi} = 0$$

を得る．　とくに $X_\xi = u$ とおくと

$$u_{tt} - u_{\xi\xi} - \frac{1}{2}(u^2)_{\xi\xi} = 0.$$

この準線型双曲型方程式の衝撃波解については，Nishida[35]を参照.

---

[18] [K-M] , p.45.

4. 領域の拡張.

我々の自由境界問題を, Ω_0 を拡張した領域

$$\Omega = \left\{(\xi,\eta) : \xi \in \mathbb{R}^1, -1 < \eta < 1\right\} \tag{4.1}$$

上に再設定する： $-1 < \eta < 0$ に対して $\{x, y, p\}$ を

$$\begin{cases} x(t,\xi,\eta) = x(t,\xi,-\eta) \\ y(t,\xi,\eta) = -y(t,\xi,-\eta) \\ p(t,\xi,\eta) = p(t,\xi,-\eta) \end{cases} \tag{4.2}$$

で定義し, 対応して，初期条件に

$$\begin{cases} x^1(\xi,\eta) = x^1(\xi,-\eta) \\ y^1(t,\xi,\eta) = -y^1(\xi,-\eta) \end{cases} \tag{4. 3}$$

を課する.

5. 方程式の reduction

$\{x, y, p\}$ に対し t に関する形式的巾級数展開を次の様にかく:

$$\begin{cases} x(t,\xi,\eta;\delta) = \xi + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(\xi,\eta;\delta)}{n!} t^n \\ y(t,\xi,\eta;\delta) = \eta + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n(\xi,\eta;\delta)}{n!} t^n \\ p(t,\xi,\eta;\delta) = -(\eta-1) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n(\xi,\eta;\delta)}{n!} t^n \end{cases} \tag{5.1}$$

前項より $-1 < \eta < 0$ に対しては

$$\begin{cases} x^n(\xi,\eta;\delta) = x^n(\xi,-\eta;\delta) \\ y^n(\xi,\eta;\delta) = -y^n(\xi,-\eta;\delta) \\ p^n(\xi,\eta;\delta) = p^n(\xi,-\eta;\delta) \end{cases} \tag{5.2}$$

である.　　上の形式級数を方程式に代入して t^n の係数を比較すると，次の方程式系の無限列が得られる：

$$\begin{cases} \nabla = {}^t(D_\xi, D_\eta) \equiv {}^t(\dfrac{\partial}{\partial\xi}, \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial}{\partial\eta}) \\ X^n = {}^t(x^n, \delta y^n) \\ \Phi^{n-1} = {}^t(\phi^{n-1}, \psi^{n-1}) \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{n-2}{\nu-2} \left(x^\nu \nabla x^{n-\nu} + (\delta y^\nu)\nabla(\delta y^{n-\nu})\right), \quad n \geq 3 \\ \Phi^1 = 0 \\ \omega^{n-1} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} \left(D_\xi x^\nu D_\eta(\delta y^{n-\nu}) - D_\eta x^\nu D_\xi(\delta y^{n-\nu})\right), \ n \geq 2 \end{cases} \tag{5.3}$$

によって

$$X^n + \frac{1}{\delta}\nabla(\delta y^{n-2}) + \nabla p^{n-2} + \Phi^{n-1} = 0, \quad n \geq 3 \tag{5.4}$$

$$X^2 + \nabla p = 0 \tag{5.5}$$

$$\nabla \cdot X^n + \omega^{n-1} = 0, \qquad n \geq 2 \tag{5.6}$$

$$D_\xi x^1 + D_\eta(\delta y^1) = 0. \tag{5.7}$$

更に

$$\begin{cases} \quad p^n(\xi, 1; \delta) = 0, \quad n \geq 0 \\ \delta y^n(\xi, 0; \delta) = 0, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{5.8}$$

さいごに境界条件 (水面の方程式) :

$$\begin{cases} x^2(1) = 0 \\ x^n(1) + \dfrac{1}{\delta} D_\xi(\delta y^{n-2})(1) + \phi^{n-1}(1) = 0, \quad n \geq 3. \end{cases} \tag{5.9}$$

自然に得られる上の方程式系について，以下の注意をする．

(a)　初期条件 $X^1 = {}^t(x^1, \delta y^1)$ について，我々は (5.7) を知るが，この段階迄は“渦なし”を仮定していないので，これ以上のことはなにもいえない．後にわかることであるが，この方程式からは δ に一様な a priori 評価は得られない．そこで，結局は，渦なしの条件 :

$$x_\xi x_{t\eta} - x_{t\xi} x_\eta + (\delta y_\xi)(\delta y_{t\eta}) - (\delta y_{t\xi})(\delta y_\eta) = 0$$

を課すると，これより

$$\begin{cases} D_\eta x^1 - D_\xi(\delta y^1) = 0 \\ D_\eta x^n - D_\xi(\delta y^n) + D_\eta \phi^{n-1} - D_\xi \psi^{n-1} = 0, \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{5.10}$$

を得る．$\{x^1, \delta y^1\}$ は

$$\begin{cases} D_\xi x^1 + D_\eta(\delta y^1) = 0 \\ D_\eta x^1 - D_\xi(\delta y^1) = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

より

$$D_\xi^2 x^1 + D_\eta^2 x^1 = 0 \tag{5.12}$$

および

$$D_\xi^2(\delta y^1) + D_\eta^2(\delta y^1) = 0 \tag{5.13}$$

をみたすことがわかる．δ に関する一様評価のために上の事実が重要である．同時に, これより初期値を解析的とする條件は水面 $\eta = 1$ において課すればよいことがわかる．

(b)　ところで，運動方程式 (3.1) - (3.2) を t で一回積分して

$$x_\xi x_{t\eta} - x_{t\xi} x_\eta + (\delta y_\xi)(\delta y_{t\eta}) - (\delta y_{t\xi})(\delta y_\eta) = J(\xi, \eta) \tag{5.14}$$

を得る．一方，Euler 座標系に於る無次元速度 ${}^t(U, V)$ と Lagrange 座標系に於る無次元速度の関係は

$${}^t(U, V) = {}^t(x_t, \delta^2 y_t)$$

である．すなわち，上の方程式 (5.14) は

$$(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)(U_y - V_x) = J(\xi, \eta)$$

であり，渦なしの條件 $U_y - V_x = 0$ から先の方程式が得られるのである．結局，これと連続の方程式 (3.3) を連立させたものが我々の方程式である．(3.3) を t で微分して δ 倍した方程式と (5.14) より，${}^t(u, \delta v) \equiv {}^t(x_t, \delta y_t)$ に対し，次の非線型楕円型方程式系を得：

$$\begin{cases} x_\xi u_\eta + (\delta y_\xi)(\delta v_\eta) - x_\eta u_\xi - (\delta y_\eta)(\delta v_\xi) = 0 \\ (\delta y_\xi) u_\eta - x_\xi(\delta v_\eta) - (\delta y_\eta) u_\xi + x_\eta(\delta v_\xi) = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

我々はこれに対する a priori 評価を直接行わない．先にのべた“Taylor展開”によって得られる $X^n = {}^t(x^n, \delta y^n)$　に対する方程式から

$$\begin{cases} D_\eta(x^n + \dfrac{1}{\delta} D_\xi(\delta y^{n-2}) + D_\xi p^{n-2} + \phi^{n-1}) - \\ \qquad\qquad - D_\xi(\delta y^n + \dfrac{1}{\delta} D_\eta(\delta y^{n-2}) + D_\eta p^{n-2} + \psi^{n-1}) = 0 \\ \nabla \cdot X^n + \omega^{n-1} = 0, \qquad n \geq 3 \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\begin{cases} D_\eta(x^2 + D_\xi p^0) - D_\xi(\delta y^2 + D_\eta p^0) = 0 \\ D_\xi x^2 + D_\eta(\delta y^2) + \omega^1 = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

を得る．特に $n = 1$ の時は (5.11)　である．

我々はこの ${}^t(x^n, \delta y^n)$ に対する非斉次線型楕円系

$$\begin{cases} D_\eta x^n - D_\xi(\delta y^n) = -D_\eta \phi^{n-1} + D_\xi \psi^{n-1} \\ D_\xi x^n + D_\eta(\delta y^n) = -\omega^{n-1}, \quad n \geq 3 \end{cases} \tag{5.18}$$

に対する a priori 評価の無限列の和をとることに問題を変換する．こうして，非線型楕円型方程式系に対する評価のむつかしさを，線型系の評価の和を求める問題に移転するのである．

(c)　$\delta = 0$ の近傍での様子．

　X^n の方程式は一見すると $\delta = 0$ を特異性にもつ様であるが，実際にはそうでないこと，次の様にしてわかる．
方程式系 (5.18) から x^n, または δy^n を消去すると：

$$(5.19) \qquad \begin{cases} D_\xi^2 x^n + D_\eta^2 x^n = f^{n-1}, \quad n \geq 2 \\ f^{n-1} = -D_\eta(D_\eta \phi^{n-1} - D_\xi \psi^{n-1}) - D_\xi \omega^{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

および

$$(5.20) \qquad \begin{cases} D_\xi^2(\delta y^n) + D_\eta^2(\delta y^n) = g^{n-1}, \\ g^{n-1} = D_\xi(D_\eta \phi^{n-1} - D_\xi \psi^{n-1}) - D_\eta \omega^{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

を得る．これ等に対する a priori 評価によって $X^n = {}^t(x^n, \delta y^n)$ に対する必要な評価を得るのである．しかしながら，本来一階楕円系である (5.18) に対する a priori 評価を，二階の方程式になおした上で得る評価でおきかえてよいか否かは吟味しなければならない．

　さて

$$D_\eta f^{n-1} - D_\xi g^{n-1} = -D_\eta^2(D_\eta \phi^{n-1} - D_\xi \psi^{n-1}) - D_\xi^2(D_\eta \phi^{n-1} - D_\xi \psi^{n-1})$$

より (5.19), (5.20) をみたす$\{x^n, \delta y^n\}$ は，次をみたす：

$$(D_\xi^2 + D_\eta^2)(D_\eta x^n - D_\xi(\delta y^n) + D_\eta \phi^{n-1} - D_\xi \psi^{n-1}) = 0$$

故に

$$(D_\eta x^n)(1) - D_\xi(\delta y^n)(1) + (D_\eta \phi^{n-1})(1) - D_\xi \psi^{n-1}(1) = 0$$

であるなら

$$D_\eta x^n - D_\xi(\delta y^n) + D_\eta \phi^{n-1} - D_\xi \psi^{n-1} = 0.$$

同様に

$$(D_\xi^2 + D_\eta^2)(D_\xi x^n + D_\eta(\delta y^n) + \omega^{n-1}) = 0$$

を得るから

$$D_\xi x^n(1) + (D_\eta(\delta y^n))(1) + \omega^{n-1}(1) = 0$$

なら

$$D_\xi x^n + D_\eta(\delta y^n) + \omega^{n-1} = 0.$$

すなわち

$$(5.21) \qquad \begin{cases} (D_\eta x^n)(1) + D_\xi \delta y^n(1) + (D_\eta \phi^{n-1})(1) - D_\xi \psi^{n-1}(1) = 0 \\ D_\xi x^n(1) + (D_\eta(\delta y^n))(1) + \omega^{n-1}(1) = 0 \end{cases}$$

を満たす2階楕円型方程式 (5.19), (5.20) の解 $\{x^n, \delta y^n\}$ は，我々の元の X^n に対する方程式系の解である．

(d)　次に，$\{x^n, \delta y^n\}$ の境界値をみておこう．次が成立.

(5.22)
$$y^n(1) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} D_\xi x^n \, d\eta - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \omega^{n-1} \, d\eta, \quad n \geq 2,$$

(5.23)
$$x^n(1) = -\phi^{n-1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} D_\xi^2 x^{n-2} \, d\eta + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} D_\xi \omega^{n-3} \, d\eta$$

が成立．実際

$$\nabla \cdot X^n + \omega^{n-1} = 0,$$

すなわち

$$\frac{\partial x^n}{\partial \xi} + \frac{\partial y^n}{\partial \eta} + \omega^{n-1} = 0$$

を $[-1, 1]$ 上 η で積分して，

$$2y^n(1) + \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \xi} x^n \, d\eta + \int_{-1}^{1} \omega^{n-1} \, d\eta = 0$$

上式を ξ で微分して

$$D_\xi y^n(1) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} D_\xi^2 x^n \, d\eta - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} D_\xi \, \omega^{n-1} \, d\eta$$

これを水面の方程式 (5.9) に代入すればよい，但 $\omega^0 = 0$.

6. a priori 評価

定義.　エネルギー $E(\phi)$, $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$

$$\Longleftrightarrow \; E(\phi) \equiv |||\phi||| + |||D_\xi\phi||| + |||D_\eta\phi||| + ||\phi(1)|| + ||D_\xi\phi(1)|| + ||(D_\eta\phi)(1)||$$

$$\begin{aligned} E(D^m\phi) \equiv\, & |||D^m\phi||| + |||D^m D_\xi\phi||| + |||D^m D_\eta\phi|||+ \\ & + ||(D^m\phi)(1)|| + ||(D^m D_\xi\phi)(1)|| + ||(D^m D_\eta\phi)(1)|| \end{aligned}$$

但　$D = D_\xi$ または D_η で,

$$\begin{aligned} |||\phi||| &= |||\phi|||_0 + |||D\phi|||_0 + |||D^2\phi|||_0, \\ |||\phi|||_0^2 &= \int\int_\Omega |\phi|^2 \, d\xi d\eta \\ |||D^m\phi||| &= \sum_{\mu=0}^m \theta^\mu |||D_\xi^{m-\mu} D_\eta^\mu \phi|||, \quad 0 < \theta < 1 \\ ||\phi(1)|| &= ||\phi(1)||_0 + ||D\phi(1)||_0 + ||D^2\phi(1)||_0, \\ ||\phi(1)||_0^2 &= \int_{-\infty}^\infty |\phi(t,\xi,1)|^2 \, d\xi \\ ||D^m\phi(1)|| &= \sum_{\mu=0}^m \theta^\mu ||(D_\xi^{m-\mu} D_\eta^\mu \phi)(1)||, \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} |||D^m\phi|||_0 &= \sum_{\mu=0}^m \theta^\mu |||D_\xi^{m-\mu} D_\eta^\mu \phi|||_0, \quad 0 < \theta < 1 \\ ||D^m\phi(1)||_0 &= \sum_{\mu=0}^m \theta^\mu ||(D_\xi^{m-\mu} D_\eta^\mu \phi)(1)||_0, \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

命題 1 (a priori 評価 I)

$$\begin{aligned} E(X^n) \leq\, & C(E)[E(DX^{n-2}) + E(D^2X^{n-2})+ \\ & + \sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{n-2}{\nu-2} E(X^\nu)(E(X^{n-\nu}) + E(DX^{n-\nu}))+ \\ & + \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} E(X^\nu)(E(X^{n-\nu}) + E(DX^{n-\nu}))+ \\ & + \sum_{\nu=1}^{n-3} \binom{n}{\nu} \{E(DX^\nu)E(DX^{n-2-\nu})+ \\ & + E(X^\nu)(E(X^{n-2-\nu}) + E(DX^{n-2-\nu}) + E(D^2X^{n-2-\nu}))\}]. \end{aligned}$$

命題 2 (a priori 評価 II)　任意の $m \geq 0, n \geq 1$ に対し

$$
\begin{aligned}
&E(D^m X^n) \leq \\
&\leq C[E(D^{m+1}X^{n-2}) + E(D^{m+2}X^{n-2}) + \\
&+ \sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{n-2}{\nu-2} \{ \sum_{\mu=1}^{m-1} \binom{m}{\mu} E(D^\mu X^\nu) E(D^{m-\mu}X^{n-\nu}) + \\
&\qquad\qquad + E(X^\nu)E(D^m X^{n-\nu}) + \\
&\qquad\qquad + \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} E(D^\mu X^\nu) E(D^{m-\mu}X^{n-\nu}) + E(X^\nu)E(D^m X^{n-\nu}) \} + \\
&+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} \{ \sum_{\mu=0}^{m-1} \binom{m}{\mu} E(D^\mu X^\nu)(E(D^{m-1-\mu}X^{n-\nu}) + E(D^{m-\mu}X^{n-\nu})) \} \\
&+ \sum_{\nu=1}^{n-3} \binom{n-2}{\nu} \{ \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m+2}{\mu} E(D^\mu X^\nu) E(D^{m-\mu+2}X^{n-2-\nu}) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \sum_{\mu=0}^{m-1} \binom{m+1}{\mu} E(D^\mu X^\nu) E(D^{m-\mu}X^{n-2-\nu}) \}].
\end{aligned}
$$

7. 圧力 p^n

圧力は X^n の存在が示されればこれによって次の様に定義される：

$$
\begin{cases}
X^n + \dfrac{1}{\delta}\nabla(\delta y^{n-1}) + \nabla p^{n-2} + \Phi^{n-1} = 0, \quad n \geq 3, \\
X^2 + \nabla p^0 = 0,
\end{cases}
\tag{7.1}
$$

より

$$
\begin{cases}
D_\xi^2 p^{n-2} + D_\eta^2 p^{n-2} = - D_\xi x^n - \dfrac{1}{\delta} D_\xi^2(\delta y^{n-2}) - D_\xi \phi^{n-1} - \\
\qquad\qquad -D_\eta(\delta y^n) - \dfrac{1}{\delta} D_\eta^2(\delta y^{n-2}) - D_\eta \psi^{n-1}, \quad n \geq 3, \\
D_\xi^2 p^0 + D_\eta^2 p^0 = - D_\xi x^2 - D_\eta(\delta y^2) - D_\xi \phi^1 - D_\eta \psi^1.
\end{cases}
\tag{7.2}
$$

右辺に対して，すでに得られた評価 (命題 1 , 命題 2) を用いて：

命題 3

$$
\begin{aligned}
E(p^{n-2}) \leq &C[E(X^n) + E(DX^{n-2}) + E(D^2X^{n-2}) + \\
&\qquad + \sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{n-2}{\nu-2} E(X^\nu)E(X^{n-\nu})],
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&E(D^m p^{n-2}) \leq \\
&\leq C[E(D^{m-1}X^n) + E(D^m X^n) + \\
&+ E(D^{m+1}X^{n-1}) + E(D^{m+2}X^{n-2}) + \\
&+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n-2}{\nu-2} \{ \sum_{\mu=0}^{m-1} \binom{m}{\mu} E(D^\mu X^\nu) E(D^{m-1-\mu}X^{n-\nu}) + \\
&\qquad + E(X^\nu)E(D^{m-1}X^{n-\nu}) + \\
&\qquad + \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} E(D^\mu X^\nu) E(D^{m-\mu}X^{n-\nu}) \}].
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

8. 巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} t^n$ の収束性.

以下の証明は全面的に Shinbrot [45] の idea に負う (S.Miki : 修士論文, 1997)[19] :

定義 8.1 $X^1 = {}^t(x^1, \delta y^1)(\xi, \eta)$ が $\bar{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}, |\eta| \leq 1\}$ で一様解析的
$\iff \exists c > 0,\ \exists R > 0 \quad s.t. \quad |||D^m X^1||| \leq cR^m m!, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$
$\iff q > 0$ を与えた時 $\exists c > 0,\ \exists r > 0 \quad s.t.\ |||D^m X^1||| \leq \frac{cr^m}{(m+1)^q} m!.$

この時,

定理 1
$q > 3/2$ を与える. $\exists \gamma > 0, \exists r > 0, \exists \epsilon > 0 (\epsilon \ll 1)$ が存在して,

i)
$$E(X^n) \leq \frac{\gamma n!}{(n+1)^{2q}} (\frac{r}{\epsilon})^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

ii)
$$E(D^m X^n) \leq \frac{\gamma (m+n-1)!}{(n+1)^q (m+n+1)^q} \frac{r^{m+n-1}}{\epsilon^{n-1}}, \quad m \geq 1,\ n \geq 1.$$

定理 2 (存在定理)
X^1 が $m = 0, 1, 2, \cdots$ に対して次をみたす :

$$||(D^m X^1)(1)|| + ||(D^m D_\xi X^1)(1)|| + ||(D^m D_\eta X^1)(1)|| \leq cR^m m!$$

$\Longrightarrow \quad \exists T > 0, \quad \bar{\Omega} = \{(\xi, \eta) : \xi \in \mathbb{R}^1, |\eta| \leq 1\} \times [0, T]$ に対し

$$\left.\begin{matrix} X(t, \xi, \eta; \delta) \\ p(t, \xi, \eta; \delta) \end{matrix}\right\} : \Omega \times [0, T) \mapsto \mathbb{R}^2$$

analytiques, が存在して, 初期値問題

[19] [K-M] , p.45.

$$\begin{cases} x_{tt}x_\xi + (\delta^2 y_{tt}+1)y_\xi + p_\xi = 0 \\ x_{tt}x_\eta + (\delta^2 y_{tt}+1)y_\eta + p_\eta = 0 \\ x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1 \\ x(0,\xi,\eta) = \xi, \quad x(0,\xi,\eta) = \eta \\ x_t(0,\xi,\eta) = x^1(\xi,\eta), \quad y_t(0,\xi,\eta) = y^1(\xi,\eta) \\ p(t,\xi,1) = 0, \quad y(t,\eta,0) = 0 \end{cases}$$

の解を与える．この解は δ に関して無限回微分可能である．

証明は $\sup|X^n| \leq cE(X^n)$ の事実 (Sobolev の補題) による．

注意　定理 1 の意味は次の通りである．

i) の右辺 $= \frac{\gamma n!}{(n+1)^{2q}}(\frac{r}{\epsilon})^{n-1} \equiv c_n$,
ii) の右辺を，D^m の存在によって変る部分と変らぬ部分とにわけて

$$\frac{\gamma(m+n-1)!}{(n+1)^q(m+n+1)^q}\frac{r^{m+n-1}}{\epsilon^{n-1}} \equiv a_n b_{m+n},$$

$a_n = \frac{\gamma}{\epsilon^{n-1}(n+1)^q}$, $b_n = \frac{(n-1)!}{(n+1)^q}r^{n-1}$, と書く．たとえば，命題 1 の評価は

$$E(X^n) \leq c[a_{n-2}b_{n-1} + a_{n-2}b_n + \sum_{\nu=2}^{n-1}\binom{n-2}{\nu-2}c_\nu(c_{n-\nu} + a_{n-\nu}b_{n-\nu+1}) + \cdots]$$

とかかれる．定理1は $E(X^n) \leq c_n$ を云っている．これによって $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E(X^n)}{n!}t^n$ の“二重級数”の収束性が示される，というのである．そのからくりは下の如くである：

$$a_{n-2}b_{n-1} \leq \exists\gamma_1\epsilon^2 c_n, \quad \gamma_1 > 0$$
$$a_{n-2}b_n \leq \exists\gamma_2\epsilon^2 c_n, \quad \gamma_2 > 0$$

等が得られ，結局 (n,ϵ) に独立な $c, \gamma_j, 1 \leq j \leq 4$, に対し

$$E(X^n) \leq c\epsilon(\gamma_1\epsilon + \gamma_2\epsilon + \gamma_3 + \gamma_4\epsilon^2)c_n$$

が得られる．故に $\epsilon \ll 1$ をうまくとって $E(X^n) \leq c_n$.